✍ 練習問題 2

Jacobi の θ 関数は以下のように定義される.

$$\theta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\big(\tfrac{1}{2}n^2\tau+nz\big),\qquad \mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}$$

$\boxed{1}$ 次の性質を証明せよ.

a) $\theta(z+1,\tau)=\theta(z,\tau)$

b) $\theta(z+\tau,\tau)=\mathbf{e}(-\frac{1}{2}\tau-z)\theta(z,\tau)$

c) $\theta(z+m\tau+n)=\mathbf{e}(-\frac{1}{2}m^2\tau-mz)\theta(z,\tau), m,n\in\mathbb{Z}$.

任意の $a,b\in\mathbf{R}$ に対し，指標付きの θ 関数 $\theta_{a,b}(z,\tau)$ が以下のように定義される.

$$\theta_{a,b}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\big(\tfrac{1}{2}(n+1)^2\tau+(n+a)(z+b)\big),\qquad \mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}$$

$\boxed{2}$ $\theta_{a,b}(z,\tau)=\mathbf{e}(\frac{1}{2}a^2\tau+a(z+b))\theta(z+a\tau+b,\tau)$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$ 次の性質を証明せよ.

a) $\theta_{0,0}(z,\tau)=\theta(z,\tau)$

b) $\theta_{a,b}(z+a'\tau,\tau)=\mathbf{e}(-\frac{1}{2}a'^2\tau-a'(z+b))\theta_{a+a',b}(z,\tau)$

c) $\theta_{a,b}(z+b',\tau)=\theta_{a,b+b'}(z,\tau)$

d) $\theta_{a+p,b+q}(z,\tau)=\mathbf{e}(aq)\theta_{a,b}(z,\tau)$

以下では τ を固定し，$\theta_{a,b}(z,\tau)$ を z のみの関数とみなす．a,b を 0 または $\frac{1}{2}$ として定義される次の 4 つの関数を考える.

$$\theta_0(z)=\theta_{0,\frac{1}{2}}(z,\tau)\qquad \theta_1(z)=\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\qquad \theta_2(z)=\theta_{\frac{1}{2},0}(z,\tau)\qquad \theta_3(z)=\theta_{0,0}(z,\tau)$$

$\boxed{4}$ $\theta_1(z)$ についての次の性質を証明せよ.

a) $\theta_1(-z)=-\theta_1(z)$

b) $\theta_1(z+\frac{1}{2})=-\theta_2(z)$

c) $\theta_1(z+\frac{\tau}{2})=-\mathbf{e}(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}z)\theta_0(z)$

d) $\theta_1(z+\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2})=i\,\mathbf{e}(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}z)\theta_3(z)$

$\boxed{5}$ 次の性質をを証明せよ.

a) $\theta_0(\frac{1}{2})^2=\theta_3(0)^2$

b) $\theta_1(\frac{1}{2})^2=\theta_2(0)^2$

c) $\theta_3(\frac{1}{2})^2=\theta_0(0)^2$

$\boxed{6}$ 授業中に $\theta_2(0)^2\theta_0(z)^2-\theta_3(0)^2\theta_1(z)^2=\theta_0(0)^2\theta_2(z)^2$ を証明した方法を参考にして，次のもう一つの関係式を証明せよ.

$$\theta_3(0)^2\theta_0(z)^2-\theta_2(0)^2\theta_1(z)^2=\theta_0(0)^2\theta_3(z)^2$$

担当： 鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)