✍ 練習問題 1

$\boxed{1}$ 周期 ω_1, ω_2 を持ち，偶関数である楕円関数は $z = 0$ が零点でも極でもなければ，

$$C \prod_{k=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_k)}{\wp(z) - \wp(b_k)} \qquad (C = \text{const.})$$

という形で表せることを示せ． 関数が原点で 0 になるか，無限大になる場合はどのような形になるか.

$\boxed{2}$ z_1，z_2 を二つの複素数とする.

a) $\wp(z_1) \neq \wp(z_2)$ であるとき，

$$\begin{cases} \wp'(z_1) - a\wp(z_1) - b = 0 \\ \wp'(z_2) - a\wp(z_2) - b = 0 \end{cases}$$

をみたす a，b が存在することを示せ.

b) 上の a，b に対して

$$f(z) = \wp'(z) - a\wp(z) - b$$

とおく．Abel の定理を用い，$f(z)$ の零点は z_1，z_2，$-z_1 - z_2$ であることを示せ.

［ヒント：$f(z)$ は 3 位の楕円関数であり，$z = 0$ がその 3 位の極であることを用いよ.］

c) $z_3 = -z_1 - z_2$ とおくと，

$$\begin{vmatrix} \wp(z_1) & \wp'(z_1) & 1 \\ \wp(z_2) & \wp'(z_2) & 1 \\ \wp(z_3) & \wp'(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことを示せ.

d) 上の式は $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ でも成り立つことを示せ.

［ヒント：正則関数の一致の定理を用いるとよい.］

e) 射影平面 $\mathbf{P}^2 = \{(x : y : z)\}$ において

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3$$

で定義される 3 次曲線を E とする．$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ のとき，E 上の 3 点

$$(\wp(z_1) : \wp'(z_1) : 1), \quad (\wp(z_2) : \wp'(z_2) : 1), \quad (\wp(z_3) : \wp'(z_3) : 1)$$

は同一直線上にあることを示せ.