入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

以下の問題は昨年度の「基礎数学 A1」の期末試験の問題から抜粋したものである．Mathematica を用いて解いてみよ．

$\boxed{1}$ 次の式を展開せよ．

$(2x-3y)(x^2+xy-2y^2)=$

$\boxed{2}$ 次の各式を因数分解せよ．

a) $\dfrac{1}{2}x^2-2x+2=$

b) $6x^2-7xy-3y^2=$

$\boxed{3}$ $P(x)=x^3+8$，$Q(x)=x^3-3x^2+6x-4$ とする．$P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．［Mathematica のヘルプで，「最大公約因子」「最小公倍因子」で検索せよ］

最大公約数 ＝

最小公倍数 ＝

$\boxed{4}$ $x^4+x^3-x^2+x-1$ を $2x^2-2x-1$ で割った商と余りを求めよ．

商 ＝　　　　　　　　余り ＝

$\boxed{5}$ 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $\dfrac{4xyz}{\dfrac{2yz^2}{3x}}=$

b) $\dfrac{\dfrac{4ab}{c}}{2\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2-\dfrac{6ab}{c}}=$

c) $\dfrac{x-y}{x^2-2xy-3y^2}-\dfrac{x-2y}{x^2-4xy+3y^2}=$

d) $\dfrac{x^3-y^3}{(x+y)^2}\div\dfrac{x^3+x^2y+xy^2}{x^2+2xy+y^2}\times\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2y-y^3}=$

e) $\dfrac{h}{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a-h}}=$

$\boxed{6}$ 不等式 $\begin{cases}2x^2-5x-3\leqq 0\\ \dfrac{2x-1}{3}>\dfrac{3x-2}{2}\end{cases}$ を解け．［不等式を解くには Reduce を用いる．］

$\boxed{7}$ 2 次方程式 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{6}=0$ を解け．

$\boxed{8}$ 2 次関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-1$ の $0\leqq x\leqq 4$ におけるグラフを描き，$0\leqq x\leqq 4$ での y の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{9}$ 次の各々の式を簡単にせよ．ただし，a，b は正の定数とする．

a) $\sqrt{-a\sqrt[3]{-a^3}}=$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt{ab^3}}{\sqrt[6]{a^5b^2}}=$

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}\times a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{3}{4}}}=$

d) $\log_{\sqrt{3}}27=$

e) $a^{3\log_a 2}=$

f) $\log_2 12+2\log_2 3-\log_2 27=$

g) $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9=$

h) $\log_5\left(7+2\sqrt{6}\right)+\log_5\left(7-2\sqrt{6}\right)=$

$\boxed{10}$ $f(x)=x(5-x)(8-x)$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $f(x)$ の導関数を求めよ．（定義に従って計算する必要はない．）

$f'(x)=$

b) $f'(x)=0$ となる x，および $f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

c) $f(x)$ の増減表を完成させ，$f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

極大値 ＝　　　　極小値 ＝

d) $y=f(x)$ のグラフを描け．

● Mathematica™ による有限体の計算

有限体 $\mathbb{F}_8$ は $\mathbb{F}_2$ に $\alpha^3+\alpha+1=0$ をみたす数 α を加えて得られる数の体系であった．$\mathbb{F}_8$ の元はすべて α の 2 次以下の多項式として表され（**加法表示**），0 を除く 7 個の元は α^k（$0 \leqq k \leqq 6$）と表せる（**乗法表示**）のであった．α の多項式 $P(\alpha)$ を 3 次以下の式に直すことは，$P(\alpha)$ を $\alpha^3+\alpha+1$ で割った余りを求めることに他ならない．これを Mathematica™ を用いて計算することを考える．基本は多項式の割り算である **PolynomialMod**を用いればよいが，今の場合，$1+1=0$ という計算ルールのもとで計算することも勘定に入れなければならない．そこで，例えば α^7 を α の 3 次以下の式に直すには，次のようにすればよい．（α を Mathematica™ で入力するのが面倒であれば a を用いてもよい．）

```
PolynomialMod[α^7,α^4 + α + 1,Modulus -> 2] ⇧+↵
```

（⇧+↵ は Shift キーと Enter キーを同時に押し，コマンドを実行することを意味する．）

k をいろいろ変えて，α^k を一度に計算するには **Table** コマンドを使うとよい．このコマンドについての詳しい説明は，Mathematica のヘルプと次のサイトを参照のこと．

https://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira/courses/mathematica/03.pdf

まず，次のようにすると結果が 1 行になって出てくる．

```
Table[PolynomialMod[α^k, α^3 + α + 1, Modulus -> 2], {k, 0, 7}] ⇧+↵
```

ここで，**TableForm** というコマンドを使うと，結果が縦書きになる．

```
Table[
  PolynomialMod[α^k, α^3 + α + 1, Modulus -> 2], {k, 0, 7}] //  TableForm ⇧+↵
```

さらに，次のようにすると，α^k とその計算結果を並べて表示できる．

```
Table[
  {α^k,PolynomialMod[α^k, α^3 + α + 1, Modulus -> 2],
  {k, 0, 7}] //TableForm ⇧+↵
```

$\boxed{1}$ 有限体 $\mathbb{F}_{16}$ は $\mathbb{F}_2$ に $\beta^4+\beta+1=0$ をみたす数 β を加えて得られる．$\mathbb{F}_{16}$ の元はすべて β の 3 次以下の多項式として表される．上の計算を真似して，$k=0,1,2,\ldots,15$ について β^k を β の 3 次以下の多項式として表示する表を作れ．

$\mathbb{F}_8$ の掛け算の表（演習問題 6 で手計算で作った）を Mathematica™ を使って作ってみよう．基本的な方法は先週試した，九九の表による．

```
F8 = {0,  1, α, α + 1, α^2, α^2 + 1, α^2 + α, α^2 + α + 1};

multF8[x_, y_] := PolynomialMod[x*y, α^3 + α + 1, Modulus -> 2];

Table[multF8[F8[[m]], F8[[n]]], {m, 1, 8}, {n, 1, 8}] // TableForm ⇧+↵
```

ここで，Mathematica™ では多項式を昇べきの順に表示するのが標準となっていることに注意しておく．すなわち，$\alpha^3+\alpha+1$ は Mathematica™ では $1+\alpha+\alpha^3$ と表示される．TraditionalForm と指定することにより，多項式をいつもの慣れた降べきの順に表すこともできるが，使い勝手はあまりよくないので慣れるしかない．

上の式で得られた結果の第 3 列目は β の 3 次以下の式の係数を並べて得た数を 2 進法表示した整数とみなしたものである．例えば，β^2+1 は $\beta^2+0\beta+1$ とみて 101 とし，それを 2 進法表示した整数 101_2 とみたものである．そして，第 4 列目はその整数を 10 進表示，すなわち普通の表示に直したものである．

$\boxed{2}$ 有限体 $\mathbb{F}_{16}$ について，$\mathbb{F}_8$ の場合を真似して，掛け算の表を作れ．

$\boxed{3}$ QR コードなどの実用上は $2^8=256$ 個の元を持つ有限体 $\mathbb{F}_{256}$ が使われることが多い．$\mathbb{F}_{256}$ は $\mathbb{F}_2$ に $\gamma^8+\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+1=0$ をみたす数 γ を加えて得られる．$\mathbb{F}_{256}$ の元はすべて γ の 7 次以下の多項式として表される．$\boxed{1}$ の計算を真似して，$k=1,2,\ldots,255$ について γ^k を γ の 7 次以下の多項式として表示する表を作れ．