

今回は $GF(2^4) = \mathbb{F}_{16}$ を用い、誤り訂正能力が 2 である BCH 符号について、具体例を用いて詳しく見ることにする。 \mathbb{F}_{16} の元はすべて β の 3 次以下の多項式として
0 を除く 15 の元は β^k ($0 \leq k \leq 14$) と表せる (乗法表示) のであった。もう一度、加法表示と乗法表示の間の対応を付けておく。例えば β^5 を β の 3 次以下の式に直すには、次のようにすればよい。

```
PolynomialMod[ $\beta^5$ ,  $\beta^4 + \beta + 1$ , Modulus -> 2]
```

k をいろいろ変えて、 β^k を一度に計算するには リストを作成するコマンド **Table** を使うとよい。

```
Table[  
  PolynomialMod[ $\beta^k$ ,  $\beta^4 + \beta + 1$ , Modulus -> 2], {k, 0, 15}]  
//TableForm
```

これから、2 つの誤りが訂正可能な (15, 7) 型の BCH 符号を詳しく見てみる。(15, 7) の 15 は送受信の bit 数、7 は情報語の bit 数を表しており、情報を 6 次多項式で表し、それを 14 次式に変換して送信する。BCH 符号は**生成多項式**と呼ばれる多項式 $g(x)$ を用いて誤り訂正機能を持たせる。BCH(15, 7) では生成多項式として

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \end{aligned}$$

を用いる。この $g(x)$ は、 $g(\beta) = g(\beta^2) = g(\beta^3) = g(\beta^4) = 0$ をみたすことが確かめられる。

●符号化

BCH(15, 7) は 7bit の情報語に 8bit の検査 bit を加え 15bit を送受信するので、まず送信したい 7bit の情報語を 6 次の情報多項式 $q(x)$ に変換する。送信多項式 $u(x)$ を作るには、生成多項式 $g(x)$ を用いて次のようにする。

情報多項式： $q(x) =$ (6 次多項式),

生成多項式： $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1,$

送信多項式： $u(x) = q(x)x^8 + (q(x)x^8 \text{ を } g(x) \text{ で割った余り})$

この定義により、送信される“正しい”多項式 $u(x)$ は $g(x)$ で割り切れる多項式ということになる。すなわち、 $u(x) = g(x)q_0(x)$ の形にかけ、 $x = \beta, \dots, \beta^4$ を代入することにより、

(1)

$$u(\beta) = u(\beta^2) = u(\beta^3) = u(\beta^4) = 0$$

が成り立つことがわかる。 $u(x)$ を 0, 1 の列に直したものが**送信語**である。

2 情報語 1100101 を送信したい。

a) 1100101 を情報多項式 $q(x)$ に直せ。

$$q(x) =$$

b) $q(x)x^8$ を $g(x)$ で割った余りを求めよ。

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

余り =

c) 送信多項式 $u(x)$ を求めよ。

$$u(x) = q(x)x^8 + (\text{b}) \text{ の答え }$$

=

d) 送信多項式 $u(x)$ を 0, 1 の列に直した送信語を求めよ。

送信語：

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Mathematica を用いて送信語を求めるには次のようにすればよい。

- まず、 $g(x)$ を定義する。

$$g[x_] := (x^4 + x + 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

- 次に 1100101 を情報多項式 $q(x)$ に直し、Mathematica で定義する。

$$q[x_] :=$$

- これより送信多項式 $u(x)$ を次の計算式で計算し、それを降べきの順に表示する。

$$\begin{aligned} u[x_] &:= \text{Expand}[q[x]*x^8] + \text{PolynomialMod}[q[x]*x^8, g[x], \text{Modulus} \\ &\quad -> 2] \\ u[x] & // \text{TraditionalForm} \end{aligned}$$

- こうして得られた送信多項式 $u(x)$ を 0, 1 の列に直した送信語を求めればよい。これを Mathematica で行うには次のようにすればよい。

$$\text{Table}[\text{Coefficient}[u[x], x, 14 - k], \{k, 0, 14\}]$$

●復号

さて、ある送信語が通信経路を通して受信されたとする。BCH(15, 7) では、誤りは 2 つまで訂正できる。そこで、送られて来た**受信語**の誤りは 2 つ以下であると仮定して、それを訂正する方法を示す。

まず、受信語を**受信多項式** $r(x)$ に直す。 $r(x)$ と送信多項式 $u(x)$ の差を**誤差多項式** $e(x)$ と呼ぶ。すなわち、 $r(x)$ は次のように表せる。

(2)

$$r(x) = u(x) + e(x)$$

送信語と受信語は高々 2bit しか相違しないという仮定から、誤差多項式 $e(x)$ は次の形をしている。

$$e(x) = 0 \quad \text{または,} \quad x^k \quad \text{または,} \quad x^k + x^l$$

ここで、(1) により、 $u(\beta) = u(\beta^2) = u(\beta^3) = u(\beta^4) = 0$ が成り立つので、(2) 式に $\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ を代入して、次が成り立つ。

$$r(\beta) = e(\beta), \quad r(\beta^2) = e(\beta^2), \quad r(\beta^3) = e(\beta^3), \quad r(\beta^4) = e(\beta^4).$$

もし受信語に誤りがなければ、これらすべてが 0 になるので、これらは“誤りの一連の症状”を表しており、シンδροーム (syndrome) と呼ばれ、 s_1, s_2, s_3, s_4 で表される。すなわち、

$$s_1 = r(\beta), \quad s_2 = r(\beta^2), \quad s_3 = r(\beta^3), \quad s_4 = r(\beta^4).$$

さて、いま誤りがちょうど 2 個あると仮定し、 $e(x) = x^k + x^l$ であるとする。そして、行列式を用いて定義される次の 2 次式 $F(X)$ を考える。

(3)
$$F(X) = \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ X & s_2 & s_3 \\ X^2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta^k + \beta^l & \beta^{2k} + \beta^{2l} \\ X & \beta^{2k} + \beta^{2l} & \beta^{3k} + \beta^{3l} \\ X^2 & \beta^{3k} + \beta^{3l} & \beta^{4k} + \beta^{4l} \end{vmatrix}$$

前回見たように、2 次方程式 $F(X) = 0$ は β^k と β^l を解に持ち、

$$x^k \text{ の位置が誤り} \iff F(\beta^k) = 0 \iff \beta^k \text{ が } F(X) = 0 \text{ の解}$$

が成り立つ。2 次方程式 $F(X) = 0$ は誤り位置方程式と呼ばれる。
(誤りがない場合、1 個しかない場合の処理については少し煩雑になるので、ここでは扱わないことにする。) これを具体例で見てみよう。

4) いま、100010111001010 という語を受信したとする。

a) 受信語を受信多項式 $r(x)$ に直し、Mathematica で定義せよ。

```
r[x_] :=
```

b) シンδροーム $s_k = r(\beta^k)$, $k = 1, \dots, 4$ を Mathematica でそれぞれ計算せよ。

```
s[k_] := PolynomialMod[r[β^k], β^4 + β + 1, Modulus -> 2]
```

c) 誤り位置方程式 $F(X)$ を定義せよ。

```
F[X_] := PolynomialMod[Det[ {  
  {1, s[1], s[2]},  
  {X, s[2], s[3]},  
  {X^2, s[3], s[4]} } ], β^4 + β + 1, Modulus -> 2]
```

d) $F(1), F(\beta), F(\beta^2), \dots, F(\beta^{14})$ を順に計算し、誤り位置を求めよ。

[これを自動でやるには、次のようにすればよい.]

```
Table[If[F[β^k] == 0, k, Nothing], {k, 0, 14}]
```

e) 送信多項式 $u(x)$ を求めよ。

f) 情報語を求めよ。

情報語:

--	--	--	--	--	--	--

5) 100100100111101 という語を受信したとして、前問と同様にした場合どうなるか試せ。