入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1						氏 名	

連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ の解を行列式を用いて解く方法を考える.

いま，$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{d}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ とおくと，上の連立方程式は $x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}} + z\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{d}}$ と表せることに注意する.

$\boxed{1}$ a) $x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}} + z\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{d}}$ の両辺に右から $\vec{\boldsymbol{b}} \wedge \vec{\boldsymbol{c}}$ をかけると，

$$(x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}} + z\vec{\boldsymbol{c}}) \wedge \vec{\boldsymbol{b}} \wedge \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{d}} \wedge \vec{\boldsymbol{b}} \wedge \vec{\boldsymbol{c}}$$

を得る．この左辺を展開することにより，$x = \dfrac{\vec{\boldsymbol{d}} \wedge \vec{\boldsymbol{b}} \wedge \vec{\boldsymbol{c}}}{\vec{\boldsymbol{a}} \wedge \vec{\boldsymbol{b}} \wedge \vec{\boldsymbol{c}}}$ となることを示せ.

b) y，z についても同様にして求めよ.

この問題で得た x, y, z を行列式で表すと，次の**クラメールの公式**を得る.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$\boxed{4}$ クラメールの公式をつかって $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ を解け.

$\boxed{5}$ $a \neq b$ とするとき，x についての方程式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ は a と b を解にもつ 2 次方程式であることを示せ．

$\boxed{6}$ $a \neq 0$，$b \neq 0$，$a \neq b$ とするとき，x についての次の 2 次方程式を考える．

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+b^2 \\ x & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ x^2 & a^3+b^3 & a^4+b^4 \end{vmatrix} = 0$$

a) $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$，とおくとき，上の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+b^2 \\ x & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ x^2 & a^3+b^3 & a^4+b^4 \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{x}} \wedge (a\vec{\boldsymbol{a}} + b\vec{\boldsymbol{b}}) \wedge (a^2\vec{\boldsymbol{a}} + b^2\vec{\boldsymbol{b}})$$

と表せる．この式の右辺を交代積の性質を用いて展開することにより，

$$\vec{\boldsymbol{x}} \wedge (a\vec{\boldsymbol{a}} + b\vec{\boldsymbol{b}}) \wedge (a^2\vec{\boldsymbol{a}} + b^2\vec{\boldsymbol{b}}) = ab(b-a)\big(\vec{\boldsymbol{x}} \wedge \vec{\boldsymbol{a}} \wedge \vec{\boldsymbol{b}}\big)$$

となることを示せ．

b) $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ または $\vec{\boldsymbol{b}}$ のとき，$(*)$ が成り立つことを示せ．これを用いて 2 次方程式 $(*)$ を解け．

c) 2 次方程式 $\begin{vmatrix} 1 & \beta^k+\beta^l & \beta^{2k}+\beta^{2l} \\ x & \beta^{2k}+\beta^{2l} & \beta^{3k}+\beta^{3l} \\ x^2 & \beta^{3k}+\beta^{3l} & \beta^{4k}+\beta^{4l} \end{vmatrix} = 0$ を解け．