

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

m は正の整数とする. 2つの整数 a, b に対して, $a - b$ が m で割りきれるとき, a と b は m を法として合同であるといい, $a \equiv b \pmod{m}$, または, m を法として $a \equiv b$ と表す. この式を合同式という.

1 次の $\square$ の中に $0, 1, 2, \dots, 6$ の中から適する値を選べ.

a) $16 \equiv \square \pmod{7}$

b) $28 \equiv \square \pmod{7}$

c) $39 \equiv \square \pmod{7}$

d) $47 \equiv \square \pmod{7}$

合同式については次のような性質がある.

合同式の性質

$a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$ のとき

(1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}.$

(2) $ac \equiv bd \pmod{m}$

(3) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ ただし, n は正の整数.

2 a) 7 を法として合同な 2 つの整数の組の例を 2 組あげ, 上の (1), (2) が成り立つことを確かめよ.

b) $a \equiv b \pmod{m}$ であるとは, 整数 k を用いて $a - b = mk$ と表せることに他ならない. このことを用いて合同式の性質 (1), (2) を証明せよ.

3 a) 上の性質 (3) を用いて 17^{10} を 7 で割ったときの余りを求めよ.

b) 合同式の性質 (3) を証明せよ.

4 任意の整数の 3 乗は, 7 を法として, $0, 1, -1$ のいずれかに合同であることを証明せよ.

5 a) 今日 4 月 16 日 (水) は 2025 年の第 106 日目である. 今年の元日は何曜日であったか.

b) 2024 年 1 月 1 日は何曜日であったか. また, それはなぜか.

c) 2001 年 1 月 1 日は何曜日であったか. また, それはなぜか.

□6□ 次のような 10 個の数からなる集合 A がある.

$$A = \{1, 3, 6, 14, 29, 60, 121, 249, 501, 1003\}$$

この中から任意の 2 つをとって作った差 (大きい数から小さい数を引いたもの) の集合 D を考える. 例えば, $6 - 1 = 5$, $501 - 121 = 380$ だから, 5 や 380 は D に属する.

a) D の要素の個数 $n(D)$ を求めよ.

b) A の要素を 6 を法として合同なもの同志に分類せよ.

c) 集合 D の中に 6 を法として 0 と合同なものはいくつあるか.

□7□ 私の年齢を 3 で割った余りは 2, 5 で割った余りは 0, 7 で割った余りは 1 である. 私の年齢は何歳か. ただし, 105 歳よりは下である.