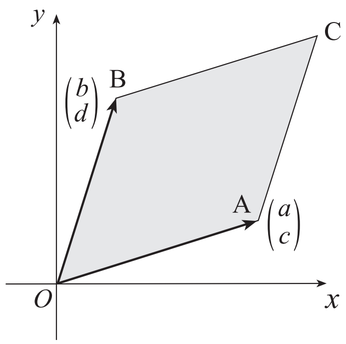
入学年度	学部	学 科		組		番 号		検	フリガナ	
			1						氏 名	

- **行列式と交代積（外積・ウェッジ積）**

$\boxed{1}$ 右の図のような平行四辺形 OACB がある．

a) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくとき，平行四辺形 OACB の面積 S は次の式で表されることを示せ．

$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$



b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ とおくとき，

$$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}),\ S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$$
$$S(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b}) = kS(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$
$$S(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a},l\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

が成り立つことを平行四辺形の初等的な図形的性質（等積変形など）を用いて説明せよ．また，分配法則

$$S(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b})$$
$$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}) = S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b_1}) + S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b_2})$$

が成り立つかどうかも考えてみよ．

$\boxed{2}$ ２つの平面ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ について**交代積**呼ばれる積 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ が定義される．ベクトルの内積同様，交代積の値はスカラー（実数）である．交代積「$\wedge$」は以下の性質を持つ．

1. 【定数倍】　$(k\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge(k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$
2. 【分配法則】$(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a_1}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a_2}\wedge\boldsymbol{b}$，　$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}) = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b_2}$
3. 【退化】　（同じベクトル同士の積は 0.）$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$
4. 【正規性】　（単位正方形の体積は 1.）$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 = 1$

a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 0$ を展開することにより，$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$（交代性）を示せ．

b) 分配法則を用いて $(a\boldsymbol{e_1}+c\boldsymbol{e_2})\wedge(b\boldsymbol{e_1}+d\boldsymbol{e_2})$ を展開し，上記の性質を用いて

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

であることを示せ．

$\boxed{3}$ ３つの空間ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について一つのスカラーを対応させる**交代積**呼ばれる一種の積 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ が定義される．交代積の値はスカラー（ベクトル空間の定義体）であり，以下の性質を持つ．

1. 【定数倍】　$(k\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge(k\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(k\boldsymbol{c}) = k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$
2. 【分配法則】$(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a_1}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a_2}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$
   $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b_1}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b_2}\wedge\boldsymbol{c}$
   $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2}) = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c_2}$
3. 【退化】　（3 つのベクトルのうち 2 つが等しければ 0.）
   $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$
4. 【正規性】　（単位正方形の体積は 1.）
   $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3} = 1$.

a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = 0$ を展開することにより，$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$ であることを示せ．一般に，２つの項を入れ替えると符号が変わることを示せ．

b) $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3}$，$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3}$，$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e_1}+c_2\boldsymbol{e_2}+c_3\boldsymbol{e_3}$ とおくとき，3 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = (a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3})\wedge(b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3})\wedge(c_1\boldsymbol{e_1}+c_2\boldsymbol{e_2}+c_3\boldsymbol{e_3})$$

と定義する．交代積の分配法則を用いて右辺を展開し，種々の性質を用いて

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

であることを示せ．

- **クラメールの公式（余談）**

連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ の解を行列式を用いて解く方法を考える．

いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ とおくと，上の連立方程式は

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$$

と表せることに注意する．

4 a) $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ の両辺に右から $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ をかけると，

$$(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$$

を得る．この左辺を展開することにより，$x=\dfrac{\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}}$ となることを示せ．

b) y，z についても同様にして求めよ．

この問題で得た解 x,y,z を行列式で表すと，次の**クラメールの公式**を得る．

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}.$$

5 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$a\neq b$ とするとき，x についての次の 2 次方程式を考える．

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+b^2\\ x & a^2+b^2 & a^3+b^3\\ x^2 & a^3+b^3 & a^4+b^4\end{vmatrix}=0$$

a) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\x\\x^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\b\\b^2\end{pmatrix}$， とおくとき，上の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+b^2\\ x & a^2+b^2 & a^3+b^3\\ x^2 & a^3+b^3 & a^4+b^4\end{vmatrix}=\boldsymbol{x}\wedge(a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b})\wedge(a^2\boldsymbol{a}+b^2\boldsymbol{b})$$

と表せる．この式の右辺を交代積の性質を用いて展開することにより，

$$\boldsymbol{x}\wedge(a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b})\wedge(a^2\boldsymbol{a}+b^2\boldsymbol{b})=ab(b-a)\big(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\big)$$

となることを示せ．

b) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{b}$ のとき，$(*)$ が成り立つことを示せ．これを用いて 2 次方程式 $(*)$ を解け．

c) 2 次方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta^k+\beta^l & \beta^{2k}+\beta^{2l}\\ x & \beta^{2k}+\beta^{2l} & \beta^{3k}+\beta^{3l}\\ x^2 & \beta^{3k}+\beta^{3l} & \beta^{4k}+\beta^{4l}\end{vmatrix}=0$$

を解け．

d) 3 次方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta^k+\beta^l+\beta^m & \beta^{2k}+\beta^{2l}+\beta^{2m} & \beta^{3k}+\beta^{3l}+\beta^{3m}\\ x & \beta^{2k}+\beta^{2l}+\beta^{2m} & \beta^{3k}+\beta^{3l}+\beta^{3m} & \beta^{4k}+\beta^{4l}+\beta^{4m}\\ x^2 & \beta^{3k}+\beta^{3l}+\beta^{3m} & \beta^{4k}+\beta^{4l}+\beta^{4m} & \beta^{5k}+\beta^{5l}+\beta^{5m}\\ x^3 & \beta^{4k}+\beta^{4l}+\beta^{4m} & \beta^{5k}+\beta^{5l}+\beta^{5m} & \beta^{6k}+\beta^{6l}+\beta^{6m}\end{vmatrix}=0$$

について同様の考察を用いてを解け．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)