入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
	B	1				氏 名

点 (x, y) が，条件 $g(x, y) = 0$ をみたしつつ変化するとき，関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めたい．いま，点 (a, b) で $f(x, y)$ が極値を持つとすると，2 つのベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ と $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right)$ が平行となることが示せる．これは，実数 λ（ラムダ）を用いて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right)$$

と表せることにほかならない．そこで，このような条件付き極値問題を考えるとき，新たに第 3 の変数 λ を導入し，3 変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ を考えると，もとの条件付きの問題がこの関数 $L(x, y, \lambda)$ の条件なしの極値問題に言い換えられることがわかる．正確には以下の通り．

条件付極値問題

拘束条件 $g(x, y) = 0$ の下で，関数 $f(x, y)$ の極値を求めたい．このとき，新たに第 3 の変数 λ を導入し，3 変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する．（λ は Lagrange の乗数と呼ばれ $L(x, y, \lambda)$ は Lagrange 関数と呼ばれる．）このとき，$L(x, y, \lambda)$ の（無条件での）極値を求めると，$g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値が求まる．したがって，極値を求めるには

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

例題

直線 $y = 2x + 3$ 上の点と 原点 O との距離の最小値を求めよ．

解 原点との距離が最小になることと，距離の 2 乗が最小になることは同値なので，拘束条件 $g(x, y) = y - 2x - 3 = 0$ の下で，距離 d の 2 乗 $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$ が最小値となる (x, y) を求めればよい．そこで，Lagrange 関数を

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - \lambda(y - 2x - 3)$$

と定義し，各々の偏微分を計算して，それらがすべて 0 になる点を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(-2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(y - 2x - 3) = 0 \end{cases}$$

第 2 式を λ について解き，第 1 式に代入して整理すると

$$2x + 4y = 0$$

が得られる．これと第 3 式を x, y についての連立 1 次方程式と見て解くと

$$x = -\frac{6}{5}, \qquad y = \frac{3}{5}$$

を得る．本来，このままではこの x, y で $f(x, y)$ が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが，この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し，最大値が存在しないことがわかる．そこで，上の値を $f(x, y)$ に代入して，$f(x, y)$ の最小値は $\frac{9}{5}$ となる．したがって距離の最小値は $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ である．

$\boxed{1}$ 表面積が 24π である円柱のうち，体積が最大のものを見つけたい．

a) 円柱の底面の半径を r と高さを h としたとき，表面積 $S(r, h)$ を r と h で表わせ．

$S(r, h) = 2 \times$ (底面積) $+$ (側面積) $= 2\pi r^2 + 2\pi rh.$

b) 表面積 $S(r, h) = 24\pi$ という条件の下で 体積 $V(r, h)$ が最大となる r と h を Lagrange の乗数法で求めよ．

$L(r, h, \lambda) = V(r, h) - \lambda(S(r, h) - 24\pi)$ とおく．$V(r, h) = \pi r^2 h$ であるから，

$$L(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - 24\pi)$$

偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = 2\pi rh - \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = \pi r^2 - \lambda(2\pi r) = 0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2\pi r^2 + 2\pi rh - 24\pi) = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $2\pi rh = \lambda(4\pi r + 2\pi h) \quad \cdots ①'$
② より $\pi r^2 = \lambda(2\pi r) \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \quad \frac{2\pi rh}{\pi r^2} = \frac{\lambda(4\pi r + 2\pi h)}{\lambda(2\pi r)} \Rightarrow \frac{2h}{r} = \frac{2r + h}{r} \Rightarrow h = 2r$$

$h = 2r$ を ③ に代入すると，$-(2\pi r^2 + 2\pi r(2h) - 24\pi) = 0$ より，$r^2 = 4$. ここで，$r > 0$ だから，$r = 2$ であり，このとき $h = 2r = 4$.

（答）$\underline{r = 2, h = 4 \text{ のとき体積は最大になる.}}$

【裏に続く】

$\boxed{2}$ ある値域での土地の価格と建物の価格は，広さ 1 平方メートルにつき，それぞれ 8 万円，20 万円である．市場調査により，顧客の満足度をは土地，建物の広さを x，y 平方メートルとするとき，$\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ に比例することがわかっている．いま，3900 万円の予算をすべて使って家を建てたい顧客がいるとき，この顧客の満足度を最大にするには，土地と建物の広さをどれだけにすればよいか． Lagrange の乗数法を用いて求めよ．

$f(x,y)=\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ を $8x+20y \leqq 3900$ という条件の下で最大にしたい．予算を使い切ったときのほうが満足度が大きくなることは明らかなので，$8x+20y=3900$ という条件の下での最大値を求めればよい．そこで，

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\lambda(8x+20y-3900)$$

とおき，偏微分を計算して，それぞれを 0 とおく．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\lambda(8)=0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=y^{-\frac{1}{2}}-\lambda(20)=0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(8x+20y-3900)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=8\lambda \quad \cdots ①'$
② より $y^{-\frac{1}{2}}=20\lambda \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{8\lambda}{20\lambda} \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{4}{5}\sqrt{x} \Rightarrow y=\frac{16}{25}x$$

これを ③ に代入して，$-\left(8x+20\times\frac{16}{25}x-3900\right)=0$． $\therefore x=3900\times\frac{5}{104}=187.5$．
このとき，$y=3900\times\frac{5}{104}\times\frac{16}{25}=120$．　（答）土地 187.5m^2，建物 120m^2 とすればよい．

$\boxed{3}$ 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の最大値・最小値を求めよ．

$L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3x-3y-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=3x^2-3-\lambda(2x)=0 & \cdots ① \\ \frac{\partial L}{\partial y}=3y^2-3-\lambda(2y)=0 & \cdots ② \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $3x^2-3=\lambda(2x) \quad \cdots ①'$
② より $3y^2-3=\lambda(2y) \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{3x^2-3}{3y^2-3}=\frac{\lambda(2x)}{\lambda(2y)} \Rightarrow \frac{x^2-1}{y^2-1}=\frac{x}{y} \Rightarrow y(x^2-1)=x(y^2-1)$$

この最後の式を x の 2 次方程式とみて，因数分解すると，$(xy+1)(x-y)=0$ となるので，$x=-1/y$ または $x=y$．
$xy=-1$ のとき，$y=-\frac{1}{x}$ を ③ に代入すると $x^2+\frac{1}{x^2}-1=0$ となる．この分母を払うと $x^4-x^2+1=0$ となるが，この方程式には実数解がない．
$x=y$ のとき，$y=x$ を ③ に代入すると $2x^2-1=0$ だから，$x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$，　$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ なので，

（答）$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最大値 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$，　$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最小値 $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{4}$ 【効用最大化問題】消費者の効用関数が $u(x,y)=x^\alpha y^\beta$ で与えられているとする．このとき，所得制約式 $p_1x+p_2y=I$ のもとで $u(x,y)$ を最大にする (x,y) を Lagrange の乗数法により求めよ．

$L(x,y,\lambda)=x^\alpha y^\beta-\lambda(p_1x+p_2y-I)$ とおき，偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=\alpha x^{\alpha-1}y^\beta-\lambda p_1=0 & \cdots ① \\ \frac{\partial L}{\partial y}=\beta x^\alpha y^{\beta-1}-\lambda p_2=0 & \cdots ② \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(p_1x+p_2y-I)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $\alpha x^{\alpha-1}y^\beta=\lambda p_1 \quad \cdots ①'$
② より $\beta x^\alpha y^{\beta-1}=\lambda p_2 \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}}=\frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \Rightarrow \frac{\alpha y}{\beta x}=\frac{p_1}{p_2} \Rightarrow y=\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}x$$

これを ③ に代入すると $p_1x+\frac{\beta p_1}{\alpha}x-I=0$ となり，$x=\frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_1}$．このとき，$y=\frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_2}$．

（答）$(x,y)=\left(\frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_1},\frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_2}\right)$ のとき，$u(x,y)$ は最大になる．

$\boxed{5}$ 【費用最小化問題】消費者の効用関数 $u(x,y)=x^\alpha y^\beta$ をある一定レベル u_0 に保ち，この効用レベルで支出 $S(x,y)=p_1x+p_2y$ を最小にしたい．そのような (x,y) を Lagrange の乗数法により求めよ．

$L(x,y,\lambda)=p_1x+p_2y-\lambda(x^\alpha y^\beta-u_0)$ とおき，偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=p_1-\lambda\alpha x^{\alpha-1}y^\beta=0 & \cdots ① \\ \frac{\partial L}{\partial y}=p_2-\lambda\beta x^\alpha y^{\beta-1}=0 & \cdots ② \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^\alpha y^\beta-u_0)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $p_1=\lambda\alpha x^{\alpha-1}y^\beta \quad \cdots ①'$
② より $p_2=\lambda\beta x^\alpha y^{\beta-1} \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{p_1}{p_2}=\frac{\lambda\alpha x^{\alpha-1}y^\beta}{\lambda\beta x^\alpha y^{\beta-1}} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha y}{\beta x} \Rightarrow y=\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}x$$

これを ③ に代入すると $x^\alpha\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}x\right)^\beta-u_0=0$ となり，$x^{\alpha+\beta}=\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^\beta u_0$．
したがって，$x=\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$．このとき，$y=\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$．

（答）$(x,y)=\left(\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}},\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right)$ のとき，$u(x,y)$ は最大になる．