

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ とする.

a) $f(x, y)$ の各変数に関する 2 階までの偏微分をすべて計算せよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 3(y-1)(y+1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

b) $f(x, y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+1) = 0 \\ 3(y-1)(y+1) = 0 \end{cases} \text{ を解く.}$$

1 番目の式より, $x = 1$ または $x = -1$, 2 番目の式より $y = 1$ または $y = -1$ であるから, 求める (x, y) の組は $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の 4 つ.

c) $f(x, y)$ の各臨界点において極大・極小を判定せよ.

$D(x, y)$ を計算すると $D(x, y) = 36xy$ となる.

$(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$ のときは, $D(1, -1) = D(-1, 1) = -36 < 0$ となるので,

$(1, -1), (-1, 1)$ は $f(x, y)$ の鞍点となる.

$(x, y) = (1, 1)$ のとき, $D(1, 1) = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$ より,

$f(x, y)$ は $(1, 1)$ で極小.

$(x, y) = (-1, -1)$ のとき, $D(-1, -1) = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$ より,

$f(x, y)$ は $(-1, -1)$ で極大.

2 関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y + 2y^2 - y^3$ の臨界点をすべて求め, 各臨界点において極大・極小を判定せよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 2(x - y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 1 + 4y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 - 6y$$

$f(x, y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求めるために

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 1 + 4y - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

を解く. まず, 1 番目の式から $y = x$ が得られるので, それを 2 番目の式に代入すると,

$$-3x^2 + 2x + 1 = -(3x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, -\frac{1}{3}$$

よって, 偏微分がともに 0 になるような (x, y) は, $(x, y) = (1, 1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ の 2 つ.

次に, $D(x, y)$ を計算すると

$$D(x, y) = 2 \times (4 - 6y) - (-2) \times (-2) = -12y + 4$$

$(x, y) = (1, 1)$ のとき, $D(1, 1) = -8 < 0$ なので, $(1, 1)$ は $f(x, y)$ の鞍点.

$(x, y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ のとき, $D(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 8 > 0$ かつ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 2 > 0$ なので, $f(x, y)$ は $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ で極小となる.

3 関数 $f(x, y) = xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ の臨界点をすべて求め、各臨界点において極大・極小を判定せよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2x)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (x^2-3x)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)(1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-x^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (1-x^2)(1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2y)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (y^2-3y)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$f(x, y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求める。そのためには、 $e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ はいつでも正の値をとることに注意して、

$$\begin{cases} (1-x^2)y = 0 \\ (1-y^2)x = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。まず、1 番目の式から $y = 0$ または $x = 1$ または $x = -1$ が得られる。

$y = 0$ のとき、2 番目の式より、 $x = 0$ 。

$x = 1$ のとき、2 番目の式より、 $y^2 = 1$ 、すなわち $y = \pm 1$

$x = -1$ のとき、2 番目の式より、 $y^2 = -1$ 、すなわち $y = \pm 1$

以上をまとめると、求める (x, y) の組は $(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の計 5 つ。

次に、 $D(x, y)$ を計算すると

$$D(x, y) = ((x^2-3x)y \cdot (y^2-3y)x - (1-x^2)^2(1-y^2)^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

となる。(ここでこの式を無理に展開する必要はない。)

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、 $D(0, 0) = -1 < 0$ なので、 $(0, 0)$ は $f(x, y)$ の鞍点。

$(x, y) = (1, 1)$ のとき、 $D(1, 1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -2e^{-1} < 0$ なので極大。

$(x, y) = (1, -1)$ のとき、 $D(1, -1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 2e^{-1} > 0$ なので極小。

$(x, y) = (-1, 1)$ のとき、 $D(-1, 1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = 2e^{-1} > 0$ なので極小。

$(x, y) = (-1, -1)$ のとき、 $D(-1, -1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -2e^{-1} < 0$ なので極大。

(答) $f(x, y)$ は $(1, 1), (-1, -1)$ で極大、 $(1, -1), (-1, 1)$ で極小となり、 $(0, 0)$ は鞍点。