# 5 高次微分を用いた近似計算



| 入学年度 | | 学部 | 学 科 | | 組 | | 番　号 | | | 検 | フリガナ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | | 1 | | | | | | | 氏 名 | |

関数 $f(x)$ において，$a$ での値 $f(a)$ が既知であるとき，$a$ を微少量 $\Delta x$ だけ変化させたときの値 $f(a+\Delta x)$ の近似値を，高次微分による近似を用いて求めることを考える．

すでに見たように，$f(a+\Delta x)$ は

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \tag{1}$$

という形で漸近展開できる．したがって，$f(a+\Delta x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\Delta x$ として近似値が計算できそうである．例えば，$f(x) = \sqrt{1+x}$ としたとき，$a = 0$, $\Delta x = 0.01$ とすると，$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ より，$f'(0) = \frac{1}{2}$ となり，

$$\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\times 0.01 = 1.005$$

となる．しかし，(1)の漸近展開式では，$\Delta x$ は 0 に近づく独立変数で，(1) は $\Delta x \to 0$ としたときの極限の様子を示すに過ぎない．今回は，$\Delta x$ は変数ではなく，例えば $\Delta x = 0.01$ などのある決まった値（無限小と対比して**有限の値**という）を表すものと考える．このとき，「真の値」$f(a+\Delta x)$ と「近似値」$f(a) + f'(a)\Delta x$ との間の「誤差」

$$\varepsilon(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big)$$

がどの程度の大きさの値なのかについて調べる．一般に，近似値を計算するとき，誤差 $\varepsilon(\Delta x)$ がどれくらいの範囲に収まっているかがわからないと近似値は本当の価値を持たない．

そこで，前回漸近展開を導いた方法をもう一度見直してみる．まず，$f'(a+t)$ の定積分を計算する式 $\displaystyle\int_0^{\Delta x} f'(a+t)\,dt = \Big[f(a+t)\Big]_0^{\Delta x} = f(a+\Delta x) - f(a)$ を次のように書き直すことから始める．

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \int_0^{\Delta x} f'(a+t)\,dt \tag{2}$$

ここで，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定し，最後の積分を部分積分を用いて計算する．部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ において，$u(t) = f'(a+t)$ とおき，$v'(t) = 1$ をみたす $v(t)$ を，$v(t) = t$ ではなく $v(t) = t - \Delta x$ とおくことにより，次の式を得る．

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta x} f'(a+\mathrm{t})\,dt &= \Big[f'(a+t)(t-\Delta x)\Big]_0^{\Delta x} - \int_0^{\Delta x}(t-\Delta x)f''(a+t)\,dt \\ &= f'(a)\Delta x - \int_0^{\Delta x}(t-\Delta x)f''(a+t)\,dt.\end{aligned} \tag{3}$$

(2) と (3) を合わせて，

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x - \int_0^{\Delta x}(t-\Delta x)f''(a+t)\,dt \tag{4}$$

を得る．いま，誤差を $R_2(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big)$ で定義すると，(4) より

$$R_2(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big) = \int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)f''(a+t)\,dx$$

を得る．（(4) 式の積分内の $(t-\Delta x)$ を $(\Delta x - t)$ に置き換え，符号を変えたことに注意．）

ここで，$f''(a+x)$ は 0 と $\Delta x$ の間において，2 つの数 $m$, $M$ を用いて

$$m \leqq f''(a+t) \leqq M \text{ が } 0 \text{ と } \Delta x \text{ の間のすべての } t \text{ について成り立つ} \tag{5}$$

ようにできるとする．注：理論的には，通常は $f''(x)$ が連続であると仮定し，連続関数の最大・最小定理を用い，$0$ と $\Delta x$ の間の $f''(x)$ の最大値を $M$ とし，最小値を $m$ をする．後に見るように，必ずしも厳密な最大・最小値を求める必要はない．）いま，$\Delta x > 0$ の場合には，$t$ が 0 と $\Delta x$ の間にあることから，$\Delta x - t > 0$ だから，$m(\Delta x - t) \leqq (\Delta x - t)f''(a+t) \leqq M(\Delta x - t)$ が成り立つので，

$$\int_0^{\Delta x} m(\Delta x - t)\,dt \leqq \int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)f''(a+t)\,dt \leqq \int_0^{\Delta x} M(\Delta x - t)\,dt$$

を得る．ここで，$\displaystyle\int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)\,dt = \Big[\Delta x t - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^{\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta x^2$ だから，

$$\frac{m}{2}\Delta x^2 \leqq R_2(\Delta x) = \int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)f''(a+t)\,dt \leqq \frac{M}{2}\Delta x^2 \tag{6}$$

が成り立つ．$\Delta x < 0$ のときも同じ式を示すことができる．この不等式 (6) は誤差 $R_2(\Delta x)$ を**評価する**式という．

**例 1**　$f(x) = \sqrt{1+x}$，$a = 0$，$\Delta x = 0.01$ としたとき，上で見たように $\sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1.005$ である．この場合 $f''(ax) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ であり，$x = 0$ のとき最大値 $M = \frac{1}{4}$，$x = \Delta x = 0.01$ のとき最小値 $m = \frac{1}{4\sqrt{1.001}}$ をとる．$m$ の正確な値はわからないが，$m > 0$ であるので，$0 < m \leqq f''(1+x) \leqq \frac{1}{4}$ が成り立つ．これより，$\sqrt{1+0.01}$ の値について次の不等式が得られる．

$$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 0.01^2 \leqq R_2(0.01) \leqq -\frac{m}{2}\times 0.01^2 < 0$$

$$-0.000125 \leqq \sqrt{1+0.01} - 1.005 < 0$$

$$\therefore\ 1.0049875 \leqq \sqrt{1+0.01} < 1.005$$

［電卓で $\sqrt{1.01}$ を計算すると，$\mathbf{1.004987562\ldots}$ となり，下限に近いことが分かる．］

さらに近似の精度を上げるために，**2 次近似式**を用いて計算する．いま，$f(x)$ が 3 回微分可能であると仮定し，(4) 式の最後の積分をさらにもう一度部分積分することによって，次の式を得る．

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)^2 f'''(a+t)\,dt \tag{7}$$

先ほどと同様に，誤差を $R_3(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \Big(f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2\Big)$ と定義すると，$R_3(\Delta x) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)^2 f'''(a+t)\,dt$ であり，$f'''(a+t)$ が 0 と $\Delta x$ の間で $m \leqq f'''(a+t) \leqq M$ と表せたとすると，

$$\frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} m(\Delta x - t)^2\,dt \leqq \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x}(\Delta x - t)^2 f'''(a+t)\,dt \leqq \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} M(\Delta x - t)^2\,dt$$

$$\frac{m}{6}\Delta x^3 \leqq R_3(\Delta x) \leqq \frac{M}{6}\Delta x^3 \tag{8}$$

という誤差の評価式が得られる．



【裏に続く】

**例 2**　$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$, $\Delta x = \frac{1}{64}$ とおいて，近似値とそのときの誤差を求めてみる．まず，微分を計算すると，

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots \tag{9}$$

また，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{64}$ のとき，$(1+\frac{1}{64})^{5/2} \geqq (1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 < \frac{3}{8(1+\frac{1}{64})^{5/2}} \leqq f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $M = \frac{3}{8}$ をとる．一方，最小値 $m$ については正確な値はよくわからないが，0 より大きいことはすぐにわかる．）(9) 式の近似の誤差は $8R_3(\frac{1}{64})$ だから，(8) の不等式を 8 倍して

$$0 \leqq 8\,R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることが結論できる．

2　$\sqrt{27} = 5\sqrt{1+\frac{8}{100}}$ という表示用い，上記と同じ方法で $\sqrt{27}$ の近似値を求め，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるかを述べよ．

この部分積分による議論を繰り返し，一般につぎを得る．

**高次微分による近似計算**

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，$\Delta x$ を正の数とする．このとき，$f(\Delta x)$ は

$$f(\Delta x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)\Delta x + \frac{f''(0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\Delta x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1}$$

と近似でき，$f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq \Delta x$ において，$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$ をみたすとすると，その誤差 $R_n(h)$ は，次の不等式をみたす．

$$\frac{m}{n!}\Delta x^n \leqq R_n(\Delta x) \leqq \frac{M}{n!}\Delta x^n$$

3　a)　$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ とし，$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を計算せよ．

b)　$\alpha$ を正の実数とするとき，$\sqrt[3]{1+\alpha}$ の 2 次の近似式 $f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2$ を求めよ．またこのときの誤差の範囲を評価せよ．

c)　$\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示を用いて $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)