入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
		B		1						氏名	

以下の式はその他の主な関数の漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

例 1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$ であるとは，$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \varepsilon_4(x)$ と表したとき，$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4(x)}{x^4} = 0$ となることである．これより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)\\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)\end{aligned}$$

と書け，さらに，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)}{x^8} = \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)}{(-x^2)^4} = \lim_{X\to 0}\frac{\varepsilon_4\big(X^4\big)}{X^4} = 0$$

が成り立つ（2 番目の等号では $X = (-x)^2$ とおいた）．すなわち，$\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)$ は $o(x^8)$ に属する無限小である．この議論を踏まえ，次のように書いて構わないことがわかる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + o\big((-x^2)^4\big)\\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^8)\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を（）内の次数の項まで求めよ．

a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(x^6 の項まで)

b) $\frac{x}{1+x^3}$　(x^7 の項まで)

c) $\log(1-x^2)$　(x^8 の項まで)

● 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において，a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 Δx だけ変化させたときの値 $f(a+\Delta x)$ の近似値を微分による高次近似を使って求めよう．前回見たように，$f(a+\Delta x)$ は

(1)
$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(\Delta x)$$

という形で 1 次近似できる．したがって，$f(a+\Delta x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\Delta x$ として近似値が計算できる．例えば，$f(x) = \sqrt{x}$ としたとき，$a = 1, \Delta x = 0.01$ とすると，$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ より，$f'(1) = \frac{1}{2}$ となり，

$$\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\times 0.01 = 1.005$$

となる．しかし，(1) の漸近展開式では，Δx は 0 に近づく独立変数で，(1) は $\Delta x \to 0$ としたときの極限の様子を示すに過ぎない．ここでは，Δx は変数ではなく，例えば $\Delta x = 0.01$ などのある決まった値（無限小と対比して**有限の値**という）を表すものとする．このとき，「真の値」$f(a+\Delta x)$ と「近似値」$f(a) + f'(a)\Delta x$ との間の「誤差」

$$\varepsilon(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big)$$

がどの程度の大きさの値なのかについて調べる．一般に，近似値を計算するとき，誤差 $\varepsilon(\Delta x)$ がどれくらいの範囲に収まっているかがわからないと近似値は本当の価値を持たない．

そこで，前回漸近展開を導いた方法をもう一度見直してみる．まず，

$$\int_0^{\Delta x} f'(a+x)\,dx = \Big[f(a+x)\Big]_0^{\Delta x} = f(a+\Delta x) - f(a)$$

を書き直した式

(2)
$$f(a+\Delta x) = f(a) + \int_0^{\Delta x} f'(a+x)\,dx$$

から始める．ここで，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定し，最後の積分を部分積分を用いて計算する．

部分積分の公式 $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ において，$u(x) = f'(a+x)$, $v'(x) = 1$ とし，さらに，$v(x) = x$ ではなく $v(x) = x - \Delta x$ とすることにより，次の式を得る．

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta x} f'(a+x)\,dx &= \Big[f'(a+x)(x-\Delta x)\Big]_0^{\Delta x} - \int_0^{\Delta x}(x-\Delta x)f''(a+x)\,dx\\ &= f'(a)\Delta x - \int_0^{\Delta x}(x-\Delta x)f''(a+x)\,dx.\end{aligned} \tag{3}$$

(2)，(3) を合わせて，

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x - \int_0^{\Delta x}(x-\Delta x)f''(a+x)\,dx \tag{4}$$

を得る．いま，誤差を $R_2(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big)$ で定義すると，(4) より

$$R_2(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \big(f(a) + f'(a)\Delta x\big) = \int_0^{\Delta x}(\Delta x - x)f''(a+x)\,dx$$

を得る．ここで，$f''(a+x)$ は 0 と Δx の間において，2 つの数 m, M を用いて

$$m \leqq f''(a+x) \leqq M$$

と表せるとする．（例えば，M を $f''(x)$ が 0 と Δx の間の最大値 M，m を最小値とすればよいが，必ずしも厳密な最大・最小値を求める必要はない．）いま，$\Delta x > 0$ と仮定すると，x が 0 と Δx の間にあることから，$\Delta x - x > 0$ だから，$m(\Delta x - x) \leqq (\Delta x - x)f''(a+x) \leqq M(\Delta x - x)$ が成り立つので，

$$\int_0^{\Delta x} m(\Delta x - x)\,dx \leqq \int_0^{\Delta x}(\Delta x - x)f''(a+x)\,dx \leqq \int_0^{\Delta x} M(\Delta x - x)\,dx$$

を得る．したがって，

$$\frac{m}{2}\Delta x^2 \leqq R_2(\Delta x) \leqq \frac{M}{2}\Delta x^2 \tag{5}$$

が成り立つ．$\Delta x < 0$ のときも同じ式を示すことができる．この不等式 (5) は誤差を**評価する**式という．

例 2. $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 1$，$\Delta x = 0.01$ としたとき，上で見たように $\sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1.005$ である．この場合 $f''(1+x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ であり，$x = 0$ のとき最大値 $M = \frac{1}{4}$，$x = \Delta x = 0.01$ のとき最小値 $m = \frac{1}{4\sqrt{1.001}}$ をとる．m の正確な値はわからないが，$m > 0$ であるので，$0 < m \leqq f''(1+x) \leqq \frac{1}{4}$ が成り立つ．これより，$\sqrt{1+0.01}$ の値について次の不等式が得られる．

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 0.01^2 \leqq R_2(0.01) \leqq -\frac{m}{2}\times 0.01^2 < 0\\ -0.000125 \leqq \sqrt{1+0.01} - 1.005 < 0\\ \therefore 1.0049875 \leqq \sqrt{1+0.01} < 1.005\end{gathered}$$

［電卓で $\sqrt{1.01}$ を計算すると，1.004987562... となり，下限に近いことが分かる．］

さらに近似の精度を上げるために，**2 次近似式**を用いて計算することを考える．いま，$f(x)$ が 3 回微分可能であると仮定し，(4) 式の最後の積分をさらにもう一度部分積分することによって，次の式を得る．

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} x^2 f'''(a+x)\,dx \tag{6}$$

先ほどと同様に，誤差を $R_3(\Delta x) = f(a+\Delta x) - \Big(f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2\Big)$ と定義すると，$R_3(\Delta x) = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} x^2 f'''(a+x)\,dx$ であり，$f'''(a+x)$ の 0 と Δx の間での最大値を M と最小値を m とすると，

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} mx^2\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} x^2 f'''(a+x)\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^{\Delta x} Mx^2\,dx\\ \frac{m}{6}\Delta x^3 \leqq R_3(\Delta x) \leqq \frac{M}{6}\Delta x^3\end{gathered} \tag{7}$$

という誤差の評価式が得られる．

例 3. $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $\Delta x = \frac{1}{64}$ とおいて，近似値とそのときの誤差を求めてみる．まず，微分を計算すると，

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2},\qquad f''(1) = \frac{-1}{4(1)^{3/2}} = -\frac{1}{4},\qquad f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(1) + f'(1)\frac{1}{64} + \frac{f''(1)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots \tag{8}$$

また，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{64}$ のとき，$(1+\frac{1}{64})^{5/2} \geqq (1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 < \frac{3}{8(1+\frac{1}{64})^{5/2}} \leqq f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(1+x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $M = \frac{3}{8}$ をとる．一方，最小値 m については正確な値はよくわからないが，0 より大きいことはすぐにわかる．）(8) 式の近似の誤差は $8R_3(\frac{1}{64})$ だから，(7) の不等式を 8 倍して

$$0 \leqq 8\,R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることが結論できる．

$\boxed{2}$ $\sqrt{27} = 5\sqrt{1+\frac{8}{100}}$ という表示用い，上記と同じ方法で $\sqrt{27}$ の近似値を求め，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるかを述べよ．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)