

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

微分係数の定義をもう一度振り返ってみよう。関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限による定義のひとつの形は

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

であった。ここで、少し見方を変え、上の式の右辺と左辺の差を考えると、

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0, \quad \text{あるいは} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = 0$$

と言い換えることができる。ここで、 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ とおくと、これは $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式に他ならない。(1)の右の極限の分子は、関数 $y = f(x)$ と接線を表す1次関数 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ の間の「誤差」を表すと考えられる。そこで、

$$\varepsilon(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$$

とおく。 $x = a$ においては $y = f(x)$ も $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ もともに同じ値 $f(a)$ をとるので、 $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ が成り立つ。上の(1)式はさらに $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varepsilon(x)}{x - a} = 0$ が成り立つことを意味する。

微分の定義では x の代わりに $x = a + h$ とおいて、微分係数の定義を $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ と書くことも多いが、ここでは、0に近づく変数を h ではなく Δx と書くことにする。すると、微分係数の定義は次のように言い換えることが出来る。

微分係数と1次近似

関数 $f(x)$ の $x = a + \Delta x$ における値は、微分係数を $f'(a)$ を用いて

$$(2) \quad f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$$

と近似するとき、その誤差 $\varepsilon(\Delta x)$ は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ をみたす。

一般に、0に近づく独立変数を Δx と書き、これを**独立無限小量**と呼ぶ。この Δx に依存する関数 $r(\Delta x)$ は、 $\Delta x \rightarrow 0$ とともに0に近づくとき、**無限小**と呼ぶ。一口に無限小と言ってもその「小ささ」、すなわち「0に近づく速さ」にはいろいろある。 Δx に比べて Δx^2 の方が早く0に近づくことは、 Δx を $0.1, 0.01, 0.001, \dots$ と0に近づけたとき、 Δx^2 は $0.01, 0.0001, 0.000001, \dots$ となることからわかるであろう。そこで、 $r(\Delta x)$ が0に近づく速さを示すために、標準的な無限小である Δx^n と比較することにより、次のように定義する。

高次の無限小

無限小 $r(\Delta x)$ は $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x^n} = 0$ が成り立つとき、 **n 次より高次の無限小**であるという。また、 $r(\Delta x)$ が n 次より高次の無限小であることを $r(\Delta x) = o(\Delta x^n)$ と略記する。

ここで現れる $o(\Delta x^n)$ をランダウの記号(ランダウのオーダー・スモール)という。2つの関数 $r_1(\Delta x)$ と

$r_2(\Delta x)$ の差が Δx^n より高次の無限小であるとき、 $r_1(\Delta x) = r_2(\Delta x) + o(\Delta x^n)$ と表す。ランダウの記号を使うと、関数 $f(x)$ の1次近似式は次のように表せる。

1次近似式

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば、次の1次近似式が成り立つ。

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(\Delta x)$$

例1. $f(x) = x^3$ とすると、 $f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^3 = a^3 + 3a^2\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$, $\varepsilon(\Delta x) = 3a\Delta x^2 + \Delta x^3$ と書ける。 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x)/\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3a\Delta x + \Delta x^2) = 0$ が成り立つ。したがって、

$$(a + \Delta x)^3 = a^3 + 3a^2\Delta x + o(\Delta x).$$

【注意】 $o(\Delta x)$ 、 $o(\Delta x^2)$ などとはあくまで略記法であって、実際の関数を表すものではない。 $o(\Delta x^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので、積分定数 C と似た取り扱いがなされる。また、 $o(\Delta x^0) = o(1)$ とは単に無限小である関数、すなわち0のまわりで定義された関数 $\varepsilon(\Delta x)$ で、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ とをみたすもの全般を表す。

つぎに、 $f(x)$ の**2次近似式**はどのようなものになるであろうか。いま、 $f(x)$ は2階微分可能であると仮定すると、 $f'(x)$ についての1次近似式を書くと

$$f'(a + \Delta x) = f'(a) + f''(a)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

と表すことが出来る。左式の Δx を x と書き直して x の関数と見直し、両辺を0から h まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x} f'(a + x) dx &= \int_0^{\Delta x} f'(a) dx + \int_0^{\Delta x} f''(a)x dx + \int_0^{\Delta x} \varepsilon_1(x) dx \\ \Rightarrow \left[f(a + x) \right]_0^{\Delta x} &= f'(a) \left[x \right]_0^{\Delta x} + f''(a) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\Delta x} + \int_0^{\Delta x} \varepsilon_1(x) dx \\ &= f'(a)\Delta x + \frac{1}{2} f''(a)\Delta x^2 + \int_0^{\Delta x} \varepsilon_1(x) dx \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^{\Delta x} \varepsilon_1(x) dx = \varepsilon_2(\Delta x)$ とおくと、

$$(3) \quad f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + \varepsilon_2(\Delta x)$$

を得る。このとき、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$ であることが示せる。その理由は(ここから少々厳密性を欠くが、) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta x) = 0$ ということは、 Δx を固定したとき、0と Δx の間では $\varepsilon_1(x)$ は $\varepsilon_1(\Delta x)$ より0に近いということなので、 $|\varepsilon_1(x)| \leq |\varepsilon_1(\Delta x)|$ が成り立ち、

$$\begin{aligned} (4) \quad \left| \frac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2} \right| &= \frac{1}{|\Delta x^2|} \left| \int_0^{\Delta x} \varepsilon_1(x) dx \right| \leq \frac{1}{|\Delta x^2|} \int_0^{\Delta x} |\varepsilon_1(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\Delta x^2} \int_0^{\Delta x} |\varepsilon_1(\Delta x)| dx = \left| \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x^2} \right| \int_0^{\Delta x} dx = \left| \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x^2} \Delta x \right| = \left| \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x} \right| \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $\varepsilon_2(\Delta x)$ は**2次より高次の無限小**であることが示される。

以上、(3) と (4) を合わせて、関数 $f(x)$ の 2 次近似の式を得る。

2 次近似式

$$(5) \quad f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

例 2. $f(x) = x^3$ とすると、 $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ だから、 $f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2 = a^3 + 3a^2\Delta x + \frac{1}{2} \cdot 6a\Delta x^2 = a^3 + 3a^2\Delta x + 3a\Delta x^2$ となる。したがって、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^3 - (a^3 + 3a^2\Delta x + 3a\Delta x^2)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

1 次近似式から 2 次近似式を得る方法を繰り返すことによって、次の n 次近似式が得られる。

$$(6) \quad f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\Delta x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n)$$

上の式はしばしば、 $a = 0$ とおき Δx の代わりに単に x と書き直して、次のように記されることが多い。

n 次の漸近展開

$$(7) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

この式は、 $x \rightarrow 0$ としたときの極限に関しては、 $f(x)$ が、 $f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + (n \text{ 次より高次の無限小})$ と表されていることを示している。(7) の形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの n 次の漸近展開と呼ぶ。大雑把にいうと、 $f(x)$ は $x = 0$ のまわりで多項式に「展開」でき、残りは「 x^{n+1} 以上の項」として一括りにし $o(x^n)$ と表して無視することができると考えてよいということである。

例 3. $f(x) = e^x$ とすると、任意の n について、 $f^{(n)}(x) = e^x$ だから、 $f^{(n)}(0) = 1$ となり、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

例 4. 等比級数の和の公式 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ の左辺と右辺を入れ換えて考えると、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

1 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を () 内の次数の項まで求めよ。

a) $\sqrt{1+x}$ (x^4 の項まで)

b) $\log(1+x)$ (x^4 の項まで)

c) $\sqrt[3]{1+x}$ (x^3 の項まで)

$f(x)$ の漸近展開は $x \rightarrow 0$ としたときの極限の計算に有用である。

例 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ を求めてみよう。 $f(x) = \sqrt{x+1}$ とおくと、 $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}$ だから、 $\sqrt{x+1} = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ となる。したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + o(x) \right) = \frac{1}{2}$$

2 漸近展開を用いて次の極限を求めよ。

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$