入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

微分係数の定義をもう一度振り返ってみよう．関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限による定義のひとつの形は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

であった．ここで，少し見方を変え，上の式の右辺と左辺の差を考えると，

$$(1)\qquad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0,\quad \text{あるいは}\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\big(f(a)+f'(a)(x-a)\big)}{x-a}=0$$

と言い換えることができる．ここで，$y=f(a)+f'(a)(x-a)$ とおくと，これは $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の方程式に他ならない．(1) の右の極限の分子は，関数 $y=f(x)$ と接線を表す 1 次関数 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ の間の「誤差」を表すと考えられる．そこで，

$$\varepsilon(x)=f(x)-\big(f(a)+f'(a)(x-a)\big)$$

とおく．$x=a$ においては $y=f(x)$ も $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ もともに同じ値 $f(a)$ をとるので，$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ が成り立つ．上の (1) 式はさらに $\lim_{x\to a}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-a}=0$ が成り立つことを意味する．

微分の定義では x の代わりに $x=a+h$ とおいて，微分係数の定義を $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と書くことも多いが，ここでは，0 に近づく変数を h ではなく Δx と書くことにする．すると，微分係数の定義は次のように言い換えることが出来る．

微分係数と 1 次近似

関数 $f(x)$ の $x=a+\Delta x$ における値は，微分係数を $f'(a)$ を用いて

$$(2)\qquad f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)$$

と近似するとき，その誤差 $\varepsilon(\Delta x)$ は $\lim_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=0$ をみたす．

一般に，0 に近づく独立変数を Δx と書き，これを**独立無限小量**と呼ぶ．この Δx に依存する関数 $r(\Delta x)$ は，$\Delta x\to 0$ とともに 0 に近づくとき，**無限小**と呼ぶ．一口に無限小と言ってもその「小ささ」，すなわち「0 に近づく速さ」にはいろいろある．Δx に比べて Δx^2 の方が早く 0 に近づくことは，Δx を $0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ と 0 に近づけたとき，Δx^2 は $0.01, 0.0001, 0.000001, \ldots$ となることからわかるであろう．そこで，$r(\Delta x)$ が 0 に近づく速さを示すために，標準的な無限小である Δx^n と比較することにより，次のように定義する．

高次の無限小

無限小 $r(\Delta x)$ は $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{r(\Delta x)}{\Delta x^n}=0$ が成り立つとき，n **次より高次の無限小**であるという． また，$r(\Delta x)$ が n 次より高次の無限小であることを $r(\Delta x)=o(\Delta x^n)$ と略記する．

ここで現れる $o(\Delta x^n)$ をランダウの記号（ランダウのスモール・o（オー））という．2 つの関数 $r_1(\Delta x)$ と $r_2(\Delta x)$ の差が Δx^n より高次の無限小であるとき，$r_1(\Delta x)=r_2(\Delta x)+o(\Delta x^n)$ と表す．ランダウの記号を使うと，関数 $f(x)$ の 1 次近似式は次のように表せる．

1 次近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，次の 1 次近似式が成り立つ．

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+o(\Delta x)$$

例 1. $f(x)=x^3$ とすると，$f(a+\Delta x)=(a+\Delta x)^3=a^3+3a^2\Delta x+\varepsilon(\Delta x)$，$\varepsilon(\Delta x)=3a\Delta x^2+\Delta x^3$ と書ける．$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(3a\Delta x+\Delta x^2)=0$ が成り立つ．したがって，

$$(a+\Delta x)^3=a^3+3a^2\Delta x+o(\Delta x).$$

【注意】$o(\Delta x)$、$o(\Delta x^2)$ などははあくまで略記法であって，実際の関数を表すものではない．$o(\Delta x^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので，積分定数 C と似た取り扱いがなされる．また，$o(\Delta x^0)=o(1)$ とは単に無限小である関数，すなわち 0 のまわりで定義された関数 $\varepsilon(\Delta x)$ で，$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$ とをみたすもの全般を表す．

つぎに，$f(x)$ の **2 次近似式**はどのようなものになるであろうか．いま，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定すると，$f'(x)$ についての 1 次近似式を書くと

$$f'(a+\Delta x)=f'(a)+f''(a)\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x),\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

と表すことが出来る．左式の Δx を x と書き直して x の関数と見直し，両辺を 0 から h まで積分すると，

$$\int_0^{\Delta x}f'(a+x)\,dx=\int_0^{\Delta x}f'(a)\,dx+\int_0^{\Delta x}f''(a)x\,dx+\int_0^{\Delta x}\varepsilon_1(x)\,dx$$

$$\Rightarrow\quad \Big[f(a+x)\Big]_0^{\Delta x}=f'(a)\Big[x\Big]_0^{\Delta x}+f''(a)\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{\Delta x}+\int_0^{\Delta x}\varepsilon_1(x)\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\Delta x}\varepsilon_1(x)\,dx=\varepsilon_2(\Delta x)$ とおくと，

$$(3)\qquad f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+\frac{f''(a)}{2}\Delta x^2+\varepsilon_2(\Delta x)$$

を得る．このとき，$\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2}=0$ であることが示せる．その理由は（ここから少々厳密性を欠くが，）$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x)=0$ ということは，Δx を固定したとき，0 と Δx の間では $\varepsilon_1(x)$ は $\varepsilon_1(\Delta x)$ より 0 に近いということなので，$|\varepsilon_1(x)|\leqq|\varepsilon_1(\Delta x)|$ が成り立ち，

$$(4)\qquad \left|\frac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2}\right|=\frac{1}{|\Delta x^2|}\left|\int_0^{\Delta x}\varepsilon_1(x)\,dx\right|\leqq\frac{1}{|\Delta x^2|}\int_0^{\Delta x}|\varepsilon_1(x)|\,dx$$

$$\leqq\frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}|\varepsilon_1(\Delta x)|\,dx=\left|\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x^2}\right|\left|\int_0^{\Delta x}dx\right|=\left|\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x^2}\Delta x\right|=\left|\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}\right|\to 0\quad(\Delta x\to 0)$$

が成り立つ．したがって，$\varepsilon_2(\Delta x)$ は **2 次より高次の無限小**であることが示された．

【裏に続く】

以上，(3) と (4) を合わせて，関数 $f(x)$ の 2 次近似の式を得る．

2 次近似式

(5) $$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{f''(a)}{2}\Delta x^2+o(\Delta x^2)$$

例 2. $f(x)=x^3$ とすると，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$ だから，$f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2=a^3+3a^2\Delta x+\frac{1}{2}\cdot 6a\Delta x^2=a^3+3a^2\Delta x+3a\Delta x^2$ となる．したがって，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta x)}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^3-(a^3+3a^2\Delta x+3a\Delta x^2)}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

1 次近似式から 2 次近似式を得る方法を繰り返すことによって，次の n 次近似式が得られる．

(6) $$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{f''(a)}{2}\Delta x^2+\frac{f'''(a)}{3!}\Delta x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

上の式はしばしば，$a=0$ とおき Δx の代わりに単に x と書き直して，次のように記されることが多い．

n 次の漸近展開

(7) $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

この式は，$x\to 0$ としたときの極限に関しては，$f(x)$ が，$f(x)=(n$ 次の多項式$)+(n$ 次より高次の無限小$)$ と表されていることを示している．(7) の形の式を $f(x)$ の $x=0$ のまわりでの **n 次の漸近展開**と呼ぶ．大雑把にいうと，$f(x)$ は $x=0$ のまわりで多項式に「展開」でき，残りは「x^{n+1} 以上の項」として一括りにし $o(x^n)$ と表して無視することができると考えてよいということである．

例 3. $f(x)=e^x$ とすると，任意の n について，$f^{(n)}(x)=e^x$ だから，$f^{(n)}(0)=1$ となり，

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

例 4. 等比級数の和の公式 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ の左辺と右辺を入れ換えて考えると，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x=0$ のまわりの漸近展開を（ ）内の次数の項まで求めよ．

a) $\sqrt{1+x}$ （x^4 の項まで）
$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$

b) $\log(1+x)$ （x^4 の項まで）
$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$

c) $\sqrt[3]{1+x}$ （x^3 の項まで）
$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+o(x^3)$

$f(x)$ の漸近展開は $x\to 0$ としたときの極限の計算に有用である．

例 5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ を求めてみよう．$f(x)=\sqrt{x+1}$ とおくと，$f'(0)=\frac{1}{2}$，$f''(x)=-\frac{1}{4}$ だから，$\sqrt{x+1}=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ となる．したがって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x+o(x)\right)=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$

$x-\log(1+x)=x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\Rightarrow\ \frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+o(x)$ （最初 3 次まで展開する必要はなかった．）

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+o(x)\right)=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-x-x^2}{x-\log(1+x)}$

$xe^x-x-x^2=x\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)-x-x^2=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

$x-\log(1+x)=x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow\ \frac{xe^x-x-x^2}{x-\log(1+x)}=\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{\frac{1}{2}x+o(x)}{\frac{1}{2}+o(x^0)}\to=0$ $\quad\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{xe^x-x-x^2}{x-\log(1+x)}=0$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$

$f(x)=(1+x)^n$ とおくと，$f'(x)=n(1+x)^{n-1}$ だから，

$(1+x)^n=f(0)+f'(0)x+o(x)=1+nx+o(x)$

$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{nx+o(x)}{x}=n+o(x^0)$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}(n+o(x^0))=n.$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$

まず，$\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}=\frac{\log(1+x)-x}{x\log(1+x)}$ と通分する．

$\log(1+x)-x=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\quad x\log(1+x)=x\big(x+o(x)\big)=x^2+o(x^2)$ と展開して，

$\frac{\log(1+x)-x}{x\log(1+x)}=\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{-\frac{1}{2}+o(x^0)}{1+o(x^0)}$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+o(x^0)}{1+o(x^0)}=-\frac{1}{2}$