2025 年 1 月 7 日

微分積分 II	入学年度	学部	学 科	組	番　号	検	氏　　　　　名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

1 次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ （$1-x^2=t$ とおく.）

$1-x^2=t$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=-2x$ だから，$x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt$ と置換できるので，

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+C=-t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

b) $\displaystyle\int (1-2x)e^{-2x}\,dx$ （部分積分）

$f(x)=1-2x$ とし，$g'(x)=e^{-2x}$ となるように $g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$ として部分積分の公式を用いると，

$$\int (1-2x)e^{-2x}\,dx=(1-2x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int (1-2x)'\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}(1-2x)e^{-2x}-\int e^{-2x}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}(1-2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$
$$=xe^{-2x}+C$$

2 $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおく.

a) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ をそれぞれ計算せよ.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

b) h を正の実数とする．$\sqrt{1+h}$ を $f(0)+f'(0)h+\dfrac{f''(0)}{2!}h^2$ で近似したときの誤差 $R_3(h)$ を評価する不等式を求めよ.

$f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$ は $0\leqq x\leqq h$ において単調に減少するので，$x=0$ のときの値が最大値になる．また，$f'''(x)$ は常に正だから，

$$0\leqq f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\leqq\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}=\frac{3}{8}$$

したがって，

$$0\leqq R_3(h)\leqq\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}h^3=\frac{1}{16}h^3$$

と評価できる.

c) $\sqrt{105}=10\sqrt{1+\frac{1}{20}}$ という表示と，b) の近似式を用いて $\sqrt{105}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{105}$ の値とは小数第何位まで一致するかを言え.

$\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+R_3(0)$ において $h=\frac{1}{20}$ とおいて，

$$\sqrt{105}=10\sqrt{1+\tfrac{1}{20}}=10\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{20}-\tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{20}\right)^2\right)+10R_3\left(\tfrac{1}{20}\right)$$
$$=10.246875+10R_3\left(\tfrac{1}{20}\right)$$

となる．前問より $0\leqq 10R_3\left(\frac{1}{20}\right)\leqq 10\frac{1}{16}\left(\frac{1}{20}\right)^3=0.0000078125$ だから，

$$10.246875\leqq\sqrt{10}\leqq 10.246875+0.0000078125=10.246953125$$

となる．これより，$\sqrt{105}$ の小数点以下第 3 位までの値は 10.246 であることがわかる．（小数第 4 位は 8 または 9 であることもわかる.）

d) 関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ のまわりでの漸近展開を 3 次の項まで求めよ.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+o(x^3)$ より，

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

e) 関数 $g(x)=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}$ の $x=0$ のまわりでの漸近展開を 6 次の項まで求めよ.

$$\sqrt{1-x^2}=1+\frac{1}{2}(-x^2)-\frac{1}{8}(-x^2)^2+\frac{1}{16}(-x^2)^3+o(x^6)$$
$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}(x^2)-\frac{1}{8}(x^2)^2+\frac{1}{16}(x^2)^3+o(x^6)$$

より，

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}=-x^2-\frac{1}{8}x^6+o(x^6)$$

f) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\log(1+x^2)}$ を求めよ．次の展開式は用いてよい.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$\log(1+x)$ の漸近展開の式より

$$\log(1+x^2)=x^2+o(x^2)$$

また，前問より

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}=-x^2+o(x^2)$$

したがって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+o(x^0)}{1+o(x^0)}$$
$$=-1$$

【裏面につづく】

$\boxed{3}$ つぎの 2 変数関数のそれぞれについて，2 階の偏微分までをすべて計算せよ．

a) $f(x,y) = \log(1+x+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x+y^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{(1+x+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(1+x+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(1+x-y^2)}{(1+x+y^2)^2}$$

b) $f(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$　　(α は $0 < \alpha < 1$ をみたす定数)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{1-\alpha}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \alpha(1-\alpha) x^{\alpha-1} y^{-\alpha}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\alpha(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha-1}$$

$\boxed{4}$ 関数 $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 6x^2 + 4xy + 5x$ の臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）をすべてもとめ，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

まず，臨界点（偏微分がともに 0 になる点）を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - y^2 + 12x + 4y + 5 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy + 4x = 0$$

を解く．2 番目の式は $-2x(y-2) = 0$ となるので，$x = 0$ または $y = 2$.
$x = 0$ のとき，1 番目の式は $-y^2 + 4y + 5 = -(y+1)(y-5) = 0$ だから
$y = -1$ または $y = 5$.
$y = 2$ のとき，1 番目の式は $3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3) = 0$ だから
$x = -1$ または $x = -3$.
よっち，臨界点は $(x,y) = (0,-1)$，$(0,5)$，$(-1,2)$，$(-3,2)$ の 4 つ．

次に $D(x,y)$ を計算し，極大・極小の判定法を用いる．

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right)^2 \\ &= (6x+12)(-2x) - (-2y+4)^2 = -12x(x+2) - 4(y-2)^2 \end{aligned}$$

- $D(0,-1) = -36 < 0$ であるから，$(0,-1)$ は $f(x,y)$ の鞍点（峠点）.
- $D(0,5) = -36 < 0$ であるから，$(5,0)$ は $f(x,y)$ の鞍点（峠点）.
- $D(-3,2) = -36 < 0$ であるから，$(-3,2)$ は $f(x,y)$ の鞍点（峠点）.
- $D(-1,2) = 12 > 0$ であり，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = 6 > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,2)$ で極小となる．

$\boxed{5}$ 底面の半径が r で高さが h である上面に蓋のない円柱の缶がある．

a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S，缶の容積を V とするとき，S，V をそれぞれ r と h を用いた式で表せ．

$S =$　$\pi r^2 + 2\pi r h$

$V =$　$\pi r^2 h$

b) 材料の面積 S が一定値 a^2（a は正数）であるという条件の下で，容積 V が最大となるような r と h をラグランジュの乗数法で求めよ．

$L(r,h,\lambda) = \pi r^2 h - \lambda(\pi r^2 + 2\pi r h - a^2)$ とおく．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = 2\pi r h - \lambda(2\pi r + 2\pi h) = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = \pi r^2 - \lambda(2\pi r) = 0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(\pi r^2 + 2\pi r h - a^2) = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より　$2\pi r h = \lambda(2\pi r + 2\pi h)$　$\cdots ①'$
②より　$\pi r^2 = \lambda(2\pi r)$　$\cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \quad \frac{2\pi r h}{\pi r^2} = \frac{\lambda(2\pi r + 2\pi h)}{\lambda(2\pi r)} \Rightarrow \frac{2h}{r} = \frac{r+h}{r} \Rightarrow r = h$$

$r = h$ を③に代入すると，$-(\pi r^2 + 2\pi r h - a^2) = -(\pi h^2 + 2\pi h^2 - a^2) = 0$.
したがって，$h = \frac{a}{\sqrt{3\pi}}$ であり，このとき r も $r = \frac{a}{\sqrt{3\pi}}$ となる．

（答）$r = h = \frac{a}{\sqrt{3\pi}}$ のとき体積 V は最大になる．