入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1				氏名	

1 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

において $f(x) = (x-1)$, $g'(x) = e^x$ とおいて $\int (x-1)e^x\,dx$ を求めよ.

$f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ として,

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x\,dx &= (x-1)e^x \\ &= (x-1)e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ &= (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C\end{aligned}$$

2 部分積分の公式において $f(x) = \log x$, $g'(x) = x$ とおいて $\int x\log x\,dx$ を求めよ.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ として,

$$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \log x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

3 部分積分を繰り返し用いることにより $\int x^2e^{-x}\,dx$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,dx \\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \\ &= -x^2e^{-x} + 2\left(x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,dx\right) \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -(x^2+2x+2)e^{-x} + C\end{aligned}$$

4 $\int \log x\,dx$ を部分積分で計算する方法を参考にして $\int (\log x)^2\,dx$ を求めよ.

$f(x) = (\log x)^2$, $g(x) = x$ とおくと, $f'(x) = 2\log x\cdot(\log x)' = \dfrac{2}{x}\log x$, $g'(x) = 1$ であり,

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= (\log x)^2\cdot x - \int \frac{2}{x}\log x\cdot x\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx \quad (\text{ここで，} f(x) = \log x,\ g(x) = x \text{ とおく}) \\ &= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) + C \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 定積分の部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ を用いて次の定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-2x}\,dx &= \left[x\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}\\ &= -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx$

$f(x) = \log x,\ g(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\log x\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e\\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ a) 置換積分を用いて $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めよ.

$\log x = t$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ だから, $\dfrac{1}{x}\,dx = dt$. したがって,

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\left(\log x\right)^2 + C$$

b) 部分積分を用いて $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めることができるか？

$f(x) = \log x,\ g'(x) = \dfrac{1}{x}$ とおくと, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であり, $g(x) = \log x$ とできるから,

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \left(\log x\right)^2 - \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

ここで, 左辺の $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を $F(x) + C_1$ とおき, 右辺の $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を $F(x) + C_2$ とおくと,

$$F(x) + C_1 = \left(\log x\right)^2 - F(x) - C_2$$

これを $F(x)$ について解くと,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\log x\right)^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

これは,

$$\int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}\left(\log x\right)^2 + C$$

を意味する.