入学年度		学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
		B		1							氏名	

1 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ を次の二通りの方法で計算せよ.

a) $\sqrt{2x+1}=t$ とおく.

$\sqrt{2x+1}=t$ より，$2x+1=t^2 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$

これより，$\dfrac{dx}{dt}=t$ となるので，$dx=t\,dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t^2-1)-1}{t}t\,dt = \int (t^2-2)\,dt = \frac{1}{3}t^3-2t+C\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C\end{aligned}$$

b) $2x+1=t$ とおく.

$2x+1=t$ より，$x=\dfrac{1}{2}(t-1)$

また，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$ より，$dx=\dfrac{1}{2}\,dt$.

したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t-1)-1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \int\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C\end{aligned}$$

2 $x^3-4=u$ とおくことにより，$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3-4}\,dx$ を求めよ.

$u=x^3-4$ とすると，$\dfrac{du}{dx}=3x^2$ だから，$x^2\,dx=\dfrac{1}{3}\,du$.

したがって，

$$\int x^2\sqrt{x^3-4}\,dx = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3-4}\right)^3+C$$

3 $1-e^x=u$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$ を求めよ.

$u=1-e^x$ とすると，$\dfrac{du}{dx}=-e^x$ だから，$e^x\,dx=-du$.

したがって，

$$\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\log u + C = -\log(1-e^x)+C$$

4 $\displaystyle\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}\,dx$ を求めよ．

$u=\sqrt{x+1}$ とすると，$x=u^2-1$ だから，$\dfrac{dx}{du}=2u \Rightarrow dx=2u\,du$．
したがって，

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}\,dx &= \int \bigl(5(u^2-1)+2\bigr)\,u\cdot 2u\,du = \int (10u^4-6u^2)\,du \\
&= \Bigl[2u^5-2u^3\Bigr]_{x=0}^{x=3} \\
&= \Bigl[2\bigl((x+1)^2\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{x+1}\bigr)\Bigr]_0^3 \\
&= \Bigl[2x(x+1)\sqrt{x+1}\Bigr]_0^3 \\
&= 2\times 3\times(3+1)\times\sqrt{3+1}-0 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

5 $\log x=t$ とおいて $\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

$\log x=t$ とすると，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}\,dx$．
したがって，

$$
\begin{aligned}
\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x} &= \int_{x=e}^{x=e^3}\frac{1}{t}\,dt = \Bigl[\log t\Bigr]_{x=e}^{x=e^3} \\
&= \Bigl[\log(\log x)\Bigr]_e^{e^3} \\
&= \log\bigl(\log e^3\bigr)-\log\bigl(\log e\bigr) \\
&= \log 3-\log 1 \\
&= \log 3
\end{aligned}
$$

6 a) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+3)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$ が成り立つように，定数 a，b，c の値を定めよ．

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$ を通分すると $\dfrac{ax(x+3)+b(x+3)+cx^2}{x^2(x+3)}=\dfrac{(a+c)x^2+(3a+b)x+3b}{x^2(x+3)}$
これが $\dfrac{1}{x^2(x+3)}$ に等しいことから，任意の x について $(a+c)x^2+(3a+b)x+3b=1$ が成り立つ．
これより，

$$
\begin{cases}
a+c &= 0\\
3a+b &= 0\\
3b &= 1
\end{cases}
$$

これを解いて，$a=-\dfrac{1}{9}, b=\dfrac{1}{3}, c=\dfrac{1}{9}$．

b) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x+3)}$ を求めよ．

a) を用いて，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^2(x+3)} &= \int\Bigl(-\frac{1}{9x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9(x+3)}\Bigr)\,dx \\
&= -\frac{1}{9}\log x-\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}\log(x+3)+C
\end{aligned}
$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)