

a は正の定数で $a \neq 1$ とするとき、 a を底とする x の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい。いま、 x が $x+h$ まで変化したときの $f(x) = a^x$ の平均変化率を指数法則を用いて変形すると

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

を得る。したがって導関数 $f'(x)$ は

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

と計算できる。ここで $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = m_a$ とおくと、

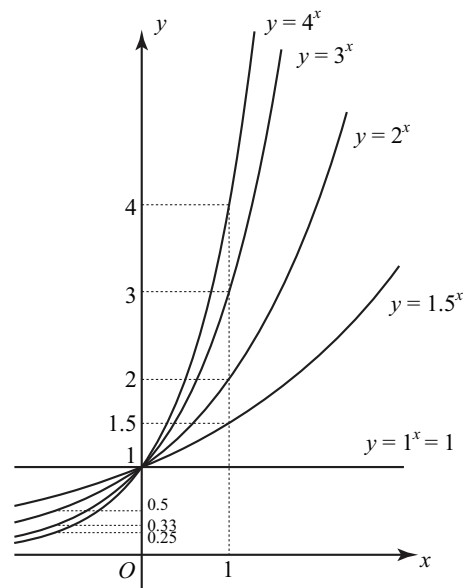
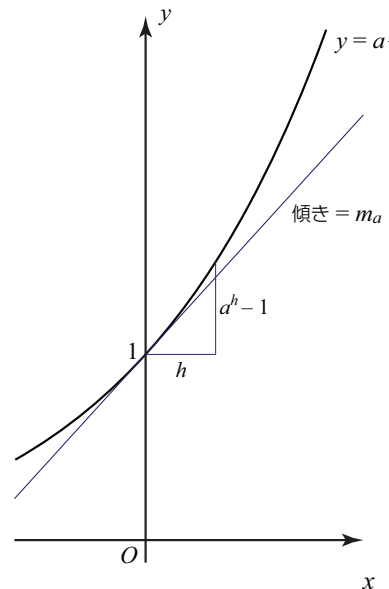
$$(2) \quad f'(x) = a^x \cdot m_a$$

となり、 m_a さえわかれば $f'(x)$ がわかる。いま、

$$(3) \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

であることに注意すると、 m_a は曲線 $y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きにほかならない。すなわち、 $f'(x)$ を計算するためには、 $x = 0$ における接線の傾き m_a さえ計算すればよいことがわかる。

そこで、(3) の極限值 m_a がどのような値になるかを考えてみる。右の図を見ると、曲線 $y = a^x$ の上の点 $(0, 1)$ における接線の傾き m_a は、 a が大きくなるほど大きくなることからわかる。そこでまず実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに、 h のいろいろな値に対して $\frac{a^h - 1}{h}$ の値を数値計算をしてみよう。スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて、右のページの表を作ってみる。大抵のスマートフォンの関数電卓アプリでは有効数字 16 桁の計算ができるので、できる限りくわしく計算してみてほしい。そして、その結果として、 $h \rightarrow 0$ としたとき、 $\frac{2^h - 1}{h}$ と $\frac{3^h - 1}{h}$ がそれぞれどのような値に近づくか見当をつけてみよう。



入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

例えば $\frac{2^{0.01} - 1}{0.01}$ を計算するには $(2^{0.01} - 1) \times 100$ を計算すればよいので、シンプルな関数電卓（例えば iPhone の電卓アプリ）では次の順序で入力すればよい。

(2 x^y . 0 1 − 1) ÷ . 0 1 =

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.717734625362932...	1.161231740339044...
0.01	0.695555005671881...	1.104669193785359...
0.001	0.693387462580633...	1.099215984204053...
10^{-4}	0.693171203765692...	1.098672638326159...
10^{-5}	0.693149582830565...	1.098618323435013...
10^{-6}	0.693147420786508...	1.098612892142811...
10^{-7}	0.693147204582597...	1.098612349015560...
10^{-8}	0.693147182962210...	1.098612294702855...
10^{-9}	0.693147180800172...	1.098612289271584...
10^{-10}	0.693147180583968...	1.098612288728457...
↓	↓	↓
0	0.69314718...	1.09861228...

この表より $\frac{2^h - 1}{h}$ 、 $\frac{3^h - 1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ、その値は次のように推測できる。

$$m_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \doteq 0.69314718, \quad m_3 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} \doteq 1.09861228$$

前ページの結果を見ると $m_2 < 1$ かつ $m_3 > 1$ であることがわかる。したがって、2 と 3 の間に $m_a = 1$ となるような a の値があるだろうと考えられる。実は、 $m_a = 1$ となるような a の値は単純な有理数ではないこと知られているので、そのような数を e という文字で表し、**Nepier の数**とか**自然対数の底**と呼ぶ。すなわち、数 e は次の式をみたすような数である。

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

すると (1) と (4) から、 $f(x) = e^x$ ならば $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ が得られる。

指数関数の e^x の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[1] 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a} = a$ という関係が成り立つ。これより、 $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$ である。そこで、 $y = e^u$ 、 $u = (\log a)x$ とおいて、合成関数の微分公式を用いて、指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ。[ヒント： $\log a$ は定数であることに注意。]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (\log a) = e^{x \log a} (\log a) = a^x \log a$$

[2] $f(x) = e^x$ とすると、自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である、すなわち $f^{-1}(x) = \log x$ である。そこで、 $f'(x) = e^x$ であることと、逆関数の微分公式を用い、 $f^{-1}(x) = \log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること、すなわち $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることを示せ。

$$(\log x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

[3] 前問によれば、 $f(x) = \log x$ としたとき、 $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ となることがわかる。一方、

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \log(1+h) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \log \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

である。(最後の等号は $\log$ が連続関数なので $\log$ と $\lim$ の順序が入れ替えらることによる。) よって、

$$f'(1) = \log \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = 1$$

となり、 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ は $\log$ をとると 1 になるような値、すなわち、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

となる。そこで、次の表を用い $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算してみよう。 $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots, 10^{-9}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し、表の空欄を埋め、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ。

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	2.5937424601
0.01	2.70481382941526...
0.001	2.71692393223589.....
10^{-4}	2.71814592682522...
10^{-5}	2.71826823717449...
10^{-6}	2.71828046931938...
10^{-7}	2.71828169254497...
10^{-8}	2.71828181486764...
10^{-9}	2.71828182709990...
↓	↓
0	2.7182818...

これより、 $e = 2.7182818...$ と推測される。