

以下の問題の目的は、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

① 【 a が自然数の場合】任意の正の整数 n について関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = x^n$ と定義する。すなわち、 $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える。このとき、

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \quad \dots\dots (*)$$

が成り立つこと、すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい。

(I) $n = 1$ のとき、 $f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

よって、 $(*)$ は $n = 1$ のとき確かに成り立つ。

(II) $n = k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。すなわち $f_k'(x) = kx^{k-1}$ が成り立つとする。すると、

$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから、積の微分公式を用いて、

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

[結論まできちんと述べよ。]

② 【 a が負の整数の場合】 n を自然数として、 $(x^{-n})'$ を求めたい。 $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)'$ と書き直し、商の微分公式を用いて計算し、さらにそれを Ax^B の形に表すことにより、 $(x^{-n})'$ を求めよ。

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

③ 【 $a = 1/n$ の場合】 n を自然数として、 $(x^{\frac{1}{n}})'$ を求めたい。関数 $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ は、関数 $f(x) = x^n$ の逆関数である。すなわち $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ である。

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ。

b) 上の結果を分数指数を用いて Ax^B の形に表すことにより、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が $a = \frac{1}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ。

④ 【 a が有理数の場合】 m, n を自然数として、 $(x^{\frac{m}{n}})'$ を求めたい。 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い、合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を計算し、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が $a = \frac{m}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ。 [ヒント： $f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい。]

5] $x \neq 1$ で, n が自然数のとき, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ. この両辺を x について微分することにより, $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ.

7] 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$f'(x) =$

6] 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき, 次の導関数を $f(x), f'(x)$ を用いて表せ..

a) $\left((f(x))^n\right)' =$

b) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' =$

8] 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば, その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し, もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x), g(x)$ がともに微分可能であるとき, 次の等式を証明せよ.

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$