入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1				氏名	

以下の問題は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

1 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について，$f_n(x) = x^n$ とおく．すなわち，$f_1(x) = x$，$f_2(x) = x^2$，$f_3(x) = x^3, \ldots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1'(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$\begin{aligned} f_{k+1}{}'(x) = \big(f_1(x)f_k(x)\big)' &= f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x) \\ &= 1\cdot x^k + x\cdot kx^{k-1} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

したがって，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ は $n = k+1$ のときも成立．

(I)，(II) より，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ はすべての自然数で成り立つ．

［結論まできちんと述べよ．］

2 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式 $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$ において $g(x) = x^n$ とすることにより $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

$g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ だから，

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

b) a) の結果を利用して $(x^{-n})' = ax^b$ の形の式に直せ．

a) で得られた式を指数を用いて表すと，

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

3 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

$f(x) = x^n$ とすると，$f'(x) = nx^{n-1}$，$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ だから，逆関数の微分公式により，

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{n\left(f^{-1}(x)\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = ax^b$ の形の式に直せ．

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

4 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．［ヒント：$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ とすると，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ であり，$f'(x) = mx^{m-1}$，$g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ だから，合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) = m(g(x))^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $x \neq 1$ で，n が自然数のとき，$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ．この両辺を x について微分することにより，$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ.

$$(\text{左辺})' = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})' &= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{-(n + 1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{(n + 1)x^{n+1} - (n + 1)x^n + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(1 - x)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の導関数を求めよ.

a) $\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n\left(f(x)\right)^{n-1} f'(x)$

b) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)' \\ &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3\left(x^2 + 2\right)\end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 2x)' \\ &= -(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{1 - x}{(\sqrt{x^2 - 2x})^3}\end{aligned}$$

c) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2 + x + 1)^5}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((x^2 + x + 1)^{\frac{5}{4}}\right)' \\ &= \frac{5}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}} \cdot (x^2 + x + 1)' \\ &= \frac{5}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}} \cdot (2x + 1) \\ &= \frac{5}{4}\,\frac{2x + 1}{\sqrt[4]{x^2 + x + 1}}\end{aligned}$$

d) $f(x) = (x + 1)\sqrt{2 - x}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x + 1)'\sqrt{2 - x} + (x + 1)\left(\sqrt{2 - x}\right)' \\ &= \sqrt{2 - x} + (x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 - x}} \cdot (2 - x)' \\ &= \sqrt{2 - x} + \frac{-(x + 1)}{2\sqrt{2 - x}} \\ &= \frac{2(2 - x) - (x + 1)}{2\sqrt{2 - x}} = \frac{-3(x - 1)}{\sqrt{2 - x}}\end{aligned}$$

e) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x^2 + 3}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(4x-1)'(x^2+3)-(4x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{4(x^2+3)-(4x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2}\end{aligned}$$

f) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 2x + 3}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(4-x^2)'(x^2-2x+3)-(4-x^2)(x^2-2x+3)'}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2-2x+3)-(4-x^2)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{2(x^2-7x+4)}{(x^2-2x+3)^2}\end{aligned}$$