

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

●積の微分公式

2つの微分可能な関数  $u = f(x)$  と  $v = g(x)$  の積として表される関数  $y = uv$  の導関数を求めたい。  
 $x, y, u, v$  の増分をそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$  で表す。

いま、 $x$  を  $x + \Delta x$  に変化させたとき、 $\Delta y$  を  $\Delta u$  と  $\Delta v$  を用いて表すことを考える。

$x$  が  $x + \Delta x$  に変化したとき

$$u \rightarrow u + \Delta u, \quad v \rightarrow v + \Delta v$$

と変化するので、

$$y = uv \rightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する。したがって、 $y$  の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

と表せる。これを展開して整理すると、

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \Delta v}$$

と表される。この式の両辺を  $\Delta x$  で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$

ここで  $\Delta x \rightarrow 0$  として  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  を求めたい。まず、導関数の定義より、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である。また、 $\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\Delta v \rightarrow 0$  となるので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \frac{dv}{dx}$$

この式を別の記号法  $\frac{dy}{dx} = (f(x)g(x))'$ ,  $\frac{du}{dx} = f'(x)$ ,  $\frac{dv}{dx} = g'(x)$  を用いて書き直すと、次の積の微分公式が得られる。

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

●商の微分公式

次に、2つの微分可能な関数  $u = f(x)$  と  $v = g(x)$  の商として表される関数  $y = \frac{u}{v}$  の導関数を求めたい。前と同様に、 $x, y, u, v$  の増分をそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$  で表し、 $x$  を  $x + \Delta x$  に変化させたとき、 $\Delta y$  を  $\Delta u$  と  $\Delta v$  を用いて表すことを考える。

前の場合と同様に、 $x$  が  $x + \Delta x$  に変化したとき、 $u \rightarrow u + \Delta u$ ,  $v \rightarrow v + \Delta v$  と変化するので、

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する。したがって、 $y$  の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる。これを通分し、整理すると、

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される。この式の両辺を  $\Delta x$  で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

と表される。この式で  $\Delta x \rightarrow 0$  として  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  を求めたい。まず、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり、 $\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\Delta v \rightarrow 0$  となるので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)v = v^2$  が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

この式を別の記号法  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ ,  $\frac{du}{dx} = f'(x)$ ,  $\frac{dv}{dx} = g'(x)$  を用いて書き直すと、次の商の微分公式が得られる。

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

1  $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$  であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数  $(f(x)g(x)h(x))'$  を求めよ.

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= ((f(x)g(x))h(x))' = (f(x)g(x))'h(x) + (f(x)g(x))h'(x) \\ &= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

2 次の関数を変数  $x$  で微分せよ.

a)  $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$f'(x) = 3x^2$$

b)  $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{(3x - 2)^2}$$

c)  $f(x) = \frac{1}{6x^3}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^4}$$

d)  $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 5}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 5}{(x^2 + 5)^2}$$

e)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

f)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

3  $f(x)$  と  $g(x)$  を 2 つの微分可能な関数とする.

a) 積の微分公式  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  を用い, 関数  $f(x)^2g(x)$  の導関数  $(f(x)^2g(x))'$  を求めよ.

$$\begin{aligned} (f(x)^2g(x))' &= (f(x)^2)'g(x) + f(x)^2g'(x) \\ &= (f'(x)f(x) + f(x)f'(x))g(x) + f(x)^2g'(x) \\ &= 2f(x)f'(x)g(x) + f(x)^2g'(x) \end{aligned}$$

b)  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  とおき,  $x$  の関数  $y$  を  $y = u^2v$  で定義する. 導関数  $\frac{dy}{dx}$  を求めよ.

$y = u \cdot u \cdot v$  だから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx}uv + u\frac{du}{dx}v + u^2\frac{dv}{dx} \\ &= 2uv\frac{du}{dx} + u^2\frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

4 底面の半径が  $r$  で, 高さが  $h$  の直円柱がある.  $r, h$  が時間  $t$  とともに変化するとき, この直円柱の体積  $V$  の  $t$  に関する導関数  $\frac{dV}{dt}$  を  $r, h, \frac{dr}{dt}, \frac{dh}{dt}$  を用いて表せ.

体積  $V$  は  $V = \pi r^2 h$  と表せる. 前問の b) を用いて, ここで,  $r, h, V$  はそれぞれ時間  $t$  の関数であるから, これらを  $r(t), h(t), V(t)$  と書くと,

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{d}{dt}(r^2 h) = \pi \left( 2rh \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dh}{dt} \right)$$