

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鎌田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく、途中の計算や説明も簡潔に加えること。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

1 $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$ とする。

a) $f(x)$ の定義域を述べよ。

分母 $\neq 0$ より、 $x \neq 2$ 。(正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$)

b) $f(x)$ を $a + \frac{b}{x-2}$ の形に表せ。

$3x-4$ を $x-2$ で割ると、商は 3、余りは 2 だから、

$$\frac{3x-4}{x-2} = 3 + \frac{2}{x-2}$$

c) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め、なるべく簡単な形で表せ。[ヒント：前問の形に直してから計算するとよい。]

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{3 + \frac{2}{(1+h)-2} - (3 + \frac{2}{1-2})}{h} \\ &= \frac{\frac{2}{h-1} + 2}{h} = \frac{2+2(h-1)}{h(h-1)} \\ &= \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)} = \frac{2}{h-1} \end{aligned}$$

d) $f(x)$ の $x=1$ における微分係数を極限による定義を用いて直接計算せよ。

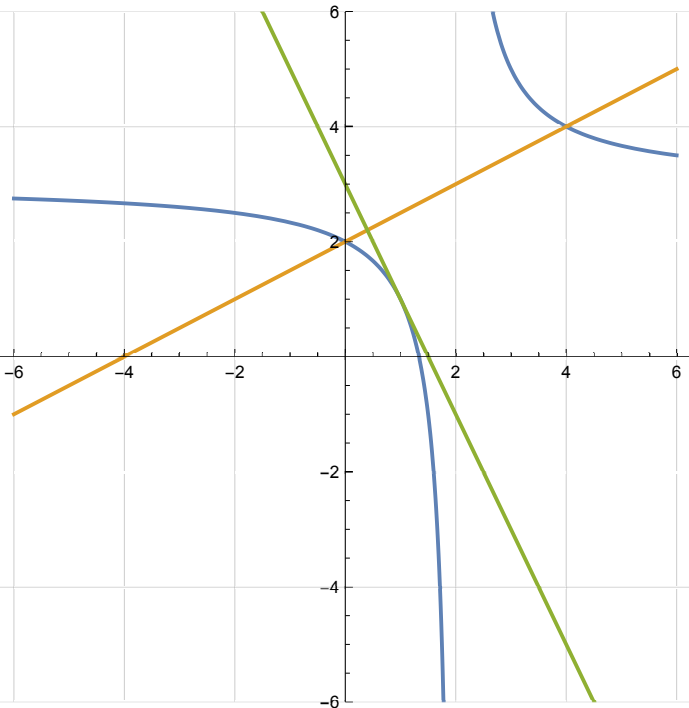
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = \frac{2}{0-1} = -2$$

e) $y=f(x)$ のグラフの $(1, f(1))$ における接線の方程式を求めよ。

$f(1)=1$ 、 $f'(1)=-2$ なので、接線は $(1, 1)$ を通り、傾き -2 の直線。

$$y-1=-2(x-1) \Leftrightarrow y=-2x+3$$

f) $y=f(x)$ のグラフ、e) で求めた接線、および直線 $y=\frac{1}{2}x+2$ を下の座標平面内に描け。



g) 次の連立方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} y = \frac{3x-4}{x-2} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

y を消去して、 $\frac{3x-4}{x-2} = \frac{1}{2}x + 2$ 。分母を払って、

$$3x-4 = (x-2)(\frac{1}{2}x + 2) \Leftrightarrow 3x-4 = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$$

$x=0$ のとき $y=2$ 、 $x=4$ のとき $y=4$ 。

(答) $(x, y) = (0, 2), (4, 4)$

h) グラフを利用して不等式 $\frac{3x-4}{x-2} \leq \frac{1}{2}x + 2$ を解け。

$y = \frac{3x-4}{x-2}$ のグラフが直線 $y = \frac{1}{2}x + 2$ より下にある x の範囲を求めればよい。グラフより、 $0 \leq x < 2$ または $x \geq 4$ 。

i) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求めよ。

$y = \frac{3x-4}{x-2}$ を x について解く。まず、両辺に $x-2$ をかけて、

$$(x-2)y = 3x-4. \text{ これを } x \text{ について整理すると } (y-3)x = 2y-4.$$

この方程式は $y \neq 3$ のときのみ解を持ち、その解は $x = \frac{2(y-2)}{y-3}$ 。

したがって、 $f^{-1}(y) = \frac{2(y-2)}{y-3}$ 。ここで、 x と y を入れ換えて、

$$f^{-1}(x) = \frac{2(x-2)}{x-3}.$$

j) $y=f(x)$ および、 $y=f^{-1}(x)$ の定義域・値域を示せ。

$$\begin{array}{ll} y=f(x) & y=f^{-1}(x) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{定義域: } x \neq 2 \\ \text{値域: } y \neq 3 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{定義域: } x \neq 3 \\ \text{値域: } y \neq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

2 m, n が整数であるとき $(x^m)' = mx^{m-1}$ 、 $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ であることはすでに証明されているとする。このとき、合成関数の微分公式を用い、 $a = \frac{m}{n}$ のときにも $(x^a)' = ax^{a-1}$ が成り立つことを証明せよ。

$y = u^{\frac{1}{n}}, u = x^m$ とおくと、 $y = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$ 。
合成関数の微分公式より、 $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 。
ここで、すでに証明されていることから、 $\frac{dy}{du} = mu^{m-1}$ 、 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} (x^{\frac{m}{n}})' &= mu^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

よって、 $a = \frac{m}{n}$ のときにも $(x^a)' = ax^{a-1}$ が成り立つことが示された。

3 $f(x) = \sqrt{2x-3}$ とする。以下の問いに答えよ。

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ。

定義域は根号内 ≥ 0 より、 $x \geq \frac{3}{2}$ 。(正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{3}{2}\}$)

値域は $y \geq 0$ 。(正確には $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$)

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め、その定義域と値域を述べよ。

$y = \sqrt{2x-3}$ の両辺を 2 乗して、 $y^2 = 2x-3$ 。これを x について解くと、
 $x = \frac{1}{2}(y^2+3)$ 。ここで、 x と y を入れ換えて、 $y = \frac{1}{2}(x^2+3)$ 。したがって、
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+3)$ である。

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は $y = f(x)$ の値域に対応して制限され、 $x \geq 0$ 。

また、値域は $y = f(x)$ の定義域に対応して、 $y \geq \frac{3}{2}$ 。

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。(定義に戻る必要はない。)

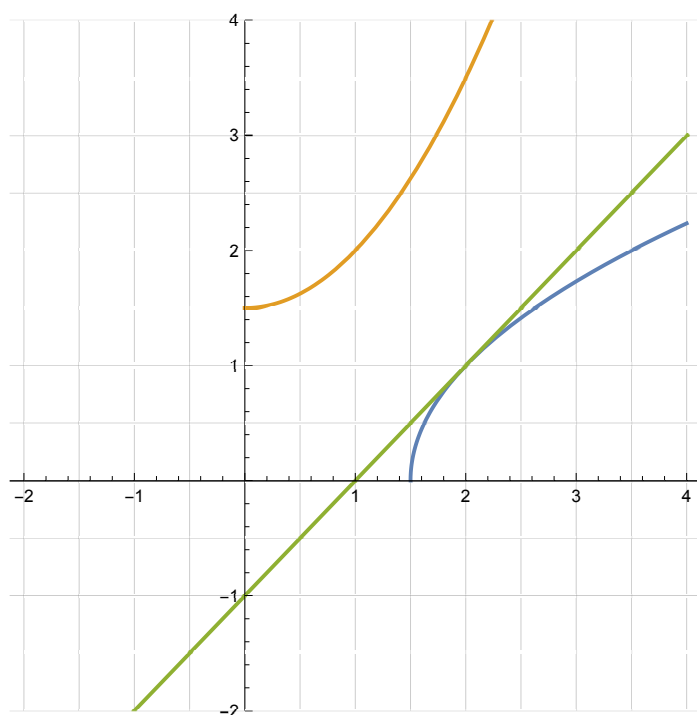
$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2x-3)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x-3)' \\ &= \frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{aligned}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ。

$f(2) = 1$ 、 $f'(2) = 1$ なので、接線は $(2, 1)$ を通り、傾き 1 の直線。

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$$

e) $y = f(x)$ のグラフ、 $(2, f(2))$ における接線、および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け。



4 $f(x) = x - \sqrt{2x}$ とする。

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域を求めよ。

根号内 ≥ 0 より、 $x \geq 0$ 。(正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$)

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ。(定義に戻る必要はない。)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' - ((2x)^{\frac{1}{2}})' = 1 - \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)' \\ &= 1 - (2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x}} \end{aligned}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x}} = 0 \text{ より、} \sqrt{2x} = 1.$$

両辺を 2 乗して、 $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ 。

d) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0 \text{ より、} \sqrt{2x} > 1.$$

両辺を 2 乗して、 $2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ 。

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

f) $f(x)$ が定義される範囲内での最大値・最小値があればそれを求めよ。

最小値: $-\frac{1}{2}$ ($x = \frac{1}{2}$)

最大値: なし。

5 次の各々の関数の導関数を求めよ。

a) $f(x) = (1-x)e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)'e^{-x^2} + (1-x)(e^{-x^2})' \\ &= -e^{-x^2} + (1-x)e^{-x^2}(-x^2)' \\ &= -e^{-x^2} - 2x(1-x)e^{-x^2} \\ &= (2x^2 - 2x - 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \log \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$

$f(x) = \log|x+1| - \log|x+2|$ だから、

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)^3 - 2(x^2 - 2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鎌田 政人								

6 $f(x) = x^2 \log x$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

$\log$ の真数条件より, $x > 0$. (正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$)

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \log x + x = x(2 \log x + 1) \end{aligned}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f(x)$ の定義域は $x > 0$ であることに注意する. この範囲で

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \log x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2 \log x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x)'(2 \log x + 1) + x(2 \log x + 1)' \\ &= 2 \log x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} \\ &= 2 \log x + 3 \end{aligned}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \log x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2 \log x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ. (増減だけでなくグラフの凹凸も調べ, 曲がった矢印 ↗ ↘ ↙ ↕ で表すこと.)

x	0	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...
$f'(x)$		−	−	−	0	+
$f''(x)$		−	0	+	+	+
$f(x)$		↘	変曲点	↘	極小	↗

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ.

極大: なし
極小: $x = e^{-\frac{1}{2}}$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ.

$$x = e^{-\frac{3}{2}}$$

7 自然対数の底 e は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ をみたす数であった. ここで, $f(x) = e^x$ とおくと, 極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を求めよ.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \end{aligned}$$

8 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると, 1 年後の元利合計は Ae^r となる. 6 年後に元本がもとの 2 倍以上になるためには, 年利はおよそ何 % 以上でなければいけないか. $\log 2 = 0.693$ として計算せよ.

6 年後の元利合計は $A(e^r)^6 = Ae^{6r}$.
これが 2 倍以上になるには, $Ae^{6r} \geq 2A$ とならなければならない.
 $e^{6r} \geq 2$ の両辺の自然対数を取り, $\log e^{6r} \geq \log 2 \Leftrightarrow 6r \geq \log 2$.
よって, $r \geq \frac{\log 2}{6} \doteq \frac{0.693}{6} = 0.1155$
すなわち, およそ 11.6% 以上なら 6 年後に 2 倍以上になる.

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】