

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 関数 $f(x) = (2x - 3)^2$ について、以下の問いに答えよ.

a) x が a から $a + h$ まで変化したときの平均変化率を求め、できるだけ簡単にせよ.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2(a+h) - 3)^2 - (2a - 3)^2}{h} \\
 &= \frac{(2a + 2h - 3)^2 - (2a - 3)^2}{h} \\
 &= \frac{4a^2 + 4h^2 + 9 + 8ah - 12a - 12h - (4a^2 - 12a + 9)}{h} \\
 &= \frac{4h^2 + 8ah - 12h}{h} \\
 &= 4h + 8a - 12
 \end{aligned}$$

b) $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を極限を用いた定義を直接用いて求めよ.

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 8a - 12) \\
 &= 8a - 12 = 4(2a - 3)
 \end{aligned}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1, 1)$ における接線の方程式を求めよ.

$(1, 1)$ における接線の傾きは $f'(1) = 4(2 - 3) = -4$.
 よって、求める接線は $(1, 1)$ を通り、傾き -4 の直線だから
 $y - 1 = -4(x - 1)$ より、 $y = -4x + 5$.

2 関数 $f(x) = \frac{1}{cx + d}$ について、以下の問いに答えよ. ただし、 c, d は定数で、 $d \neq 0$ とする.

a) x が a から $a + h$ まで変化したときの平均変化率を求め、できるだけ簡単にせよ.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{c(a+h)+d} - \frac{1}{ca+d}}{h} \\
 &= \frac{ca + d - (c(a+h) + d)}{h(c(a+h) + d)(ca + d)} \\
 &= \frac{-ch}{h(c(a+h) + d)(ca + d)} \\
 &= \frac{-c}{(c(a+h) + d)(ca + d)} \\
 &= \frac{-c}{(c(a+h) + d)(ca + d)}
 \end{aligned}$$

b) $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を a) でもとめた平均変化率の極限として求めよ.

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-c}{(c(a+h) + d)(ca + d)} \\
 &= \frac{-c}{(c(a+0) + d)(ca + d)} \\
 &= \frac{-c}{(ca + d)^2}
 \end{aligned}$$

3 関数 $f(x) = \sqrt{2x+3}$ について、以下の問いに答えよ。

- a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め、分子を有理化することにより、できるだけ簡単にせよ。

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3}}{h} \\&= \frac{(\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3})(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3})}{h(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3})} \\&= \frac{2(a+h)+3-(2a+3)}{h(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3})} \\&= \frac{2h}{h(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3})} \\&= \frac{2}{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}} \\&= \frac{2}{\sqrt{2(a+0)+3}+\sqrt{2a+3}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2a+3}}\end{aligned}$$

- b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を平均変化率の極限として求めよ。

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}} \\&= \frac{2}{\sqrt{2(a+0)+3}+\sqrt{2a+3}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2a+3}}\end{aligned}$$

- c) $y=f(x)$ のグラフの $(-1, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

$$(1, 1) \text{ における接線の傾きは } f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{2(-1)+3}} = 1.$$

よって、求める接線は $(-1, 1)$ を通り、傾き 1 の直線だから

$$y-1=1 \cdot (x+1) \text{ より、 } y=x+2.$$

4 次の各々の関数について、その導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ。

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+(x+h)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)-(1+(x+h)^2)}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1-x^2-2xh-h^2}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h)}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x+h)}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x+0)}{(1+(x+0)^2)(1+x^2)} \\&= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \\&= \frac{-1}{\sqrt{x+0}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})} \\&= \frac{-1}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$