入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 【e について補足】 極限 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ の意味を次のように考えることができる．いま，仮に 1 万円の元金に年率 1（= 100%）で利息が付くとすると，1 年後には $(1+1)=2$ 万円となるが，月ごとの複利で利息が付いたとすると，毎月の利率を $\dfrac{1}{12}$ と考え，1 か月後には元利合計が $\left(1+\dfrac{1}{12}\right)$ 万円，そして 1 年後 = 12 ヶ月後には

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61304 \text{ 万円}$$

となる．ここで毎月ではなく，毎日ごとの複利で利息が付いたとすると，1 年 =365 日後には

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71457 \text{ 万円}$$

となり，さらに 1 時間ごとの複利なら 1 年 = 365 × 24 = 8760 時間なので，

$$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2.71813 \text{ 万円}$$

となる．この上さらに 1 分ごと，1 秒ごと...，と複利計算を行う頻度をどんどん上げていくと 1 年後に元利合計はどうなるであろうか．もし

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が収束するとすると、元利合計はその値かける 1 万円となると考えられる．そこで $t = \dfrac{1}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $t\to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e = 2.7182818284590452354\ldots$$

となることがわかる．すなわち e は瞬間ごとに利息の付いていく複利法（連続複利という）の元利合計と考えられる．自然界にはこのような連続複利と同様の法則にしたがうとみなされる現象が多く存在し，それらの研究において，この e という数は欠くことのできない大切なものである．

a) $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r$ であることを用いて，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ を e を用いて表せ．

$h = \frac{n}{r}$ とおくと，すなわち，$n = \frac{r}{h}$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r = \left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r = e^r$$

b) 元本 A 円を年利 r の連続複利で運用したと仮定すると m 年後の元利合計はいくらになるか．

［ヒント：年利 r の連続複利で 1 年間運用すると $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ 倍になる．］

1 年間で，$A\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$，すなわち，$Ae^r$ になるから，m 年間では $A(e^r)^m = Ae^{mr}$ になる．

c) 年利 6.0% の連続複利で運用した資金がもとの 2 倍になるまでにはどれくらいの期間がかかるか．

もとの資金が 2 倍になる時間を T とすると，$Ae^{0.06T} = 2A$ が成り立つ．この両辺の自然対数をとると，$0.06T = \log 2$. したがって，$T = \frac{1}{0.06}\log 2 \fallingdotseq 11.55$ 年後．（11 年 6 ヶ月と 20 日後）

2 $\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$ は既知として，0 以外の実数で定義された関数 $f(x) = \log|x|$ の導関数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \log x & x>0 \\ \log(-x) & x<0 \end{cases} \text{ であるから，} \begin{cases} x>0 \text{ のとき} & f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ x>0 \text{ のとき} & f'(x) = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

したがって，$x \neq 0$ である任意の実数について $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\therefore (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

3 微分可能な関数 $f(x)$ の値域に 0 が含まれないとするとき，$\left(\log|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を証明せよ．

$y = \log|u|,\ u = f(x)$ とおくと，$y = \log|f(x)|$ だから，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

4 両辺の絶対値の自然対数を取ることによって次の関数を微分せよ．

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

$\log|f(x)| = \log\dfrac{\sqrt{x+1}}{|x+2|} = \log|x+1|^{\frac{1}{2}} - \log|x+2|$ の両辺を x で微分して，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore f'(x) = \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2}\right)\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{x+2-2(x+1)}{2(x+2)(x+1)}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x+1}}{2(x+2)^2(x+1)} = \frac{-x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$

$\log|f(x)| = 2\log|x^2-1| - 2\log|x^2+1|$ の両辺を x で微分して，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2(x^2-1)'}{x^2-1} - \frac{2(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{4x(x^2+1)-4x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

5 次の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = xe^{-2x}$

$$f'(x) = (x)'e^{-2x} + x(e^{-2x})' = e^{-2x} + x\cdot(-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}$$

c) $f(x) = \log(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

d) $f(x) = x(\log x - 1)$

$$f'(x) = (x)'(\log x - 1) + x(\log x - 1)' = \log x - 1 + x\cdot\frac{1}{x} = \log x$$

e) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$f'(x) = \frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

f) $f(x) = e^x\log x$

$$f'(x) = (e^x)'\log x + e^x(\log x)' = e^x\log x + e^x\cdot\frac{1}{x} = e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$$

g) $f(x) = x^2(\log x)^3$

$$f'(x) = (x^2)'(\log x)^3 + x^2\left((\log x)^3\right)' = 2x(\log x)^3 + x^2\cdot 3(\log x)^2(\log x)' = 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2 = x(\log x)^2(2\log x + 3)$$

h) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

6 曲線 $y = \log x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．また，その接点の座標を求めよ．

a) 傾きが e である．

$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x-a)$．$f(x) = \log x$ とおくと傾き $f'(a) = \frac{1}{a}$．これが e に等しいから，$a = \dfrac{1}{e}$．

したがって，接点は $\left(\frac{1}{e}, \log\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}, -1\right)$ で，接線の方程式は $y - \log\left(\frac{1}{e}\right) = e\left(x - \frac{1}{e}\right)$ より，$y = ex - 2$．

（答）接線：$y = ex - 2$，接点：$\left(\frac{1}{e}, -1\right)$

b) 原点を通る．

接点 $(a, \log a)$ における接線の方程式は $y - \log a = \frac{1}{a}(x-a)$ より，$y = \frac{1}{a}x - 1 + \log a$．これが原点の通る条件は $-1 + \log a = 0$，すなわち，$a = e$．このとき，接線の方程式は $y = \frac{1}{e}x$ で，接点は $(e, 1)$．

（答）接線：$y = \frac{1}{e}x$，接点：$(e, 1)$

7 $f(x) = xe^{-x}$ とする．

a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = (1-x)e^{-x}.$$

b) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

c) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減を調べ，増減表を完成させよ．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)