

平均変化率

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変わるとき、 y の値は $f(b) - f(a)$ だけ変化する。
このとき、 x の値の変化に対する y の値の変化の割合

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を、 x の値が a から b まで変化したときの $f(x)$ の平均変化という。

1 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ のとする。 x が 1 から 3 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ

極限

一般に、関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が b に限りなく近づくことを、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a)$$

と書き、 b を、 x が a に近づくときの $f(x)$ の極限值という。

2 次の分数式を約分して、既約な分数式になおせ。

$$\text{a) } \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4} \quad \text{b) } \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 9x} = \frac{x(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\text{c) } \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)} = \frac{x^2 + ax + a^2}{x+a}$$

3 次の分数式をなるべく簡単にせよ。

$$\text{a) } \frac{1}{x-a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{x-a} \left(\frac{a-x}{xa} \right) = \frac{1}{x-a} \left(\frac{-(x-a)}{xa} \right) = \frac{-1}{xa} \quad \text{b) } \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a+h)}{(a+h)a} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(a+h)a}$$

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

4 次の極限を求めよ。

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2)(3x - 1) = 20 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x-4} = -\frac{1}{6} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{x+a} = \frac{a^2 + a \cdot a + a^2}{a+a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$

$$\text{g) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3a^2 + 3ah + h^2)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\text{i) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$$

5 関数 $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ について以下の問いに答えよ.

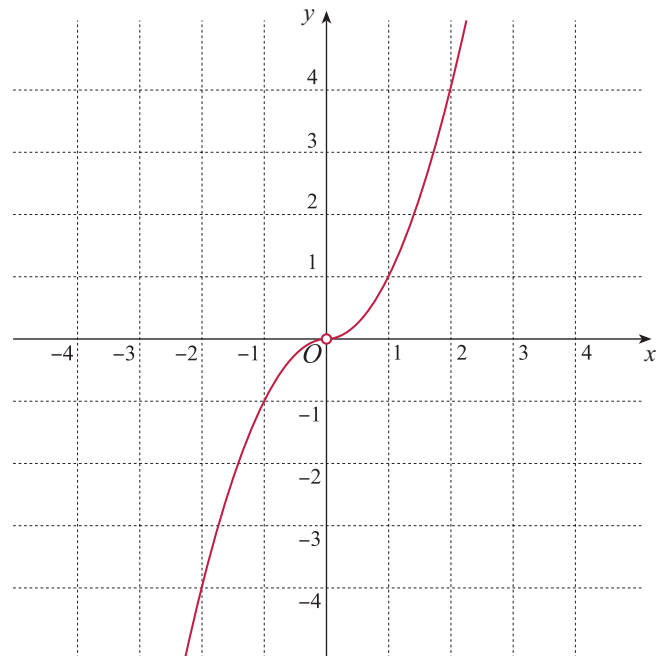
a) 関数 $f(x)$ の定義域を示せ.

$x \neq 0$ (正確には $\{x \mid x \text{ は実数}, x \neq 0\}$ とか, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ などと表すべきではあるが…)

b) 関数 $f(x)$ を, 絶対値記号を用いない, 場合分けによる形で表せ.

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \text{ と表せるから, } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & (x \geq 0) \\ \frac{x^3}{-x} & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

c) $y = f(x)$ のグラフを描け.



d) グラフから $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|}$ を求めよ.

グラフを見ると, x が正の値を保ちながら 0 に近づいても, x が負の値を保ちながら 0 に近づいても, y の値はいずれも 0 に近づく.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$$

微分係数

a を定数とし, 変数 x の値が a から $a + h$ まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

において, h を 0 に限りなく近づけると, 平均変化率がある決まった値に限りなく近づくならば, その極限値を, 関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数または瞬間変化率といい, $f'(a)$ で表す. すなわち,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

6 $f(x) = \frac{1}{2-3x}$ のとする.

a) x が 1 から 2 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ.

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2-3 \cdot 2} - \frac{1}{2-3 \cdot 1}}{1} = \frac{1}{-4} - \frac{1}{-1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

b) $x = 1$ における $f(x)$ の瞬間変化率 (= 微分係数) $f'(1)$ を定義にしたがって求めよ.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2-3(1+h)} - \frac{1}{2-3 \cdot 1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{-1-3h} - \frac{1}{-1} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{-1}{1+3h} + 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{-1 + (1+3h)}{1+3h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{3h}{1+3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{1+3h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ.

求める接線は $(1, -1)$ を通り傾き $f'(1) = 3$ の直線だから, その方程式は

$$y - (-1) = 3(x - 1).$$

$$\therefore y = 3x - 4$$