

1

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ (2-x) & (1 \leq x \leq 2) \\ 0 & (x < 0, 2 < x) \end{cases}$$

で定義される $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X について $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$, 平均 $\mu = E(X)$, 標準偏差 $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ をそれぞれ求めよ.

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
		B	1			氏 名	

2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義される $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X について $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$, 平均 $\mu = E(X)$, 標準偏差 $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ をそれぞれ求めよ.

3

あるハンバーガー店のドライブスルーでのお客さんの到着間隔 Y (分) は次の確率密度関数で表される指数分布に従っているとする.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- a) 平均到着間隔はいくらか.
- b) 5 分間車が来ない確率を求めよ. ただし $e^{-5/3} \approx 0.189$ である.

[微分積分を履修していない人へ] e とは, π と同様にある実数の定数であって, その値は $e = 2.718281828459045 \dots$ であり, 「Napier の数」とか「自然対数の底」と呼ばれる. e のもつ一番大事な性質は, 指数関数 $f(x) = e^x$ を考えると, その導関数が $f'(x)$ が e^x に一致すること, すなわち

$$(e^x)' = e^x$$

であることである. 2^x や 10^x の導関数はこのように簡単には表されず, 微積分がかかわる理論においては指数関数は通常 e を底とする指数関数 e^x を用いる.

連鎖律 (合成関数の微分公式) : $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ を用いれば, a を定数とすると,

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

が成り立つ. また, a が正数のとき, x を大きくするにしたがって e^{-ax} は急激に減少する関数で, どんな自然数 n に対しても $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-ax} = 0$ となる. これより,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \left[\frac{-1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{a} e^{-ax} \right) - \left(\frac{-1}{a} e^0 \right) = \frac{1}{a}$$

が成り立つ. また, 部分積分の公式 : $\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ により,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = \left[x \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{a} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$$

が成り立つ.