入学年度	学部	学科		組		番	号		検	フリガナ	
		B		1						氏名	

1

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ (2-x) & (1 \leq x \leq 2) \\ 0 & (x < 0, 2 < x) \end{cases}$$

で定義される $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X について $P\left(X < \dfrac{1}{2}\right)$, 平均 $\mu = E(X)$, 標準偏差 $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ をそれぞれ求めよ.

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = 1$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)^2 x\,dx + \int_1^2 (x-1)^2(2-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 = \frac{1}{12} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義される $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X について $P\left(X < \dfrac{1}{2}\right)$, 平均 $\mu = E(X)$, 標準偏差 $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ をそれぞれ求めよ.

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{32} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{32}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \left[\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^4\right]_{-1}^1 = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{20}x^5\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{3}$ あるハンバーガー店のドライブスルーでのお客さんの到着間隔 X (分) は次の確率密度関数で表される指数分布に従っているとする．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) 平均到着間隔はいくらか．

b) 5 分間車が来ない確率を求めよ．ただし $e^{-5/3} \approx 0.189$ である．

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ とおくと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda}\,dx = \left[\lambda \cdot \frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

となり，$f(x)$ は確率密度関数となる．この分布 X の期待値 $E(X)$ は，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\right) - (-0) + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right) - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

また，分散 $V(X)$ を計算公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ 用いて計算すると，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(-x^2e^{-\lambda x}\right) + 0 + \left[-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 + \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right) + 0 + \left[-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right) - \left(-\frac{2}{\lambda^2}\right) \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

a) $\lambda = \frac{1}{3}$ の場合なので，平均到着時間 $E(Y)$ は $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$(分)

b) $P\left(Y \geqq 5\right) = \int_5^{\infty} f(x)\,dx = \int_5^{\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x}{3}}\right]_5^{\infty} = -\lim_{M\to\infty} e^{-\frac{M}{3}} + e^{-\frac{5}{3}} = e^{-\frac{5}{3}} \fallingdotseq 0.189$

［微分積分を履修していない人へ］e とは，π と同様にある実数の定数であって，その値は $e = 2.718281828459045\ldots$ であり，「Napier の数」とか「自然対数の底」と呼ばれれる．e のもつ一番大事な性質は，指数関数 $f(x) = e^x$ を考えると，その導関数が $f'(x)$ が e^x に一致すること，すなわち

$$(e^x)' = e^x$$

であることである．2^x や 10^x の導関数はこのように簡単には表されず，微積分がかかわる理論においては指数関数は通常 e を底とする指数関数 e^x を用いる．

連鎖律（合成関数の微分公式）：$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$ を用いれば，a を定数とするとき，

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

が成り立つ．また，a が正数のとき，x を大きくするにしたがって e^{-ax} は急激に減少する関数で，どんな自然数 n に対しても $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-ax} = 0$ となる．これより，

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{a}e^{-ax}\right) - \left(\frac{-1}{a}e^0\right) = \frac{1}{a}$$

が成り立つ．また，部分積分の公式：$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ により，

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,dx = \left[x \cdot \frac{-1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{a}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2}$$

が成り立つ．