入学年度		学部	学	科	組		番		号		検	フリガナ	
		B		1								氏 名	

1 確率変数 X の取り得る値は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であり，それぞれの値をとる確率は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．

a, b を定数とするとき，確率変数 Y を $Y = (aX + b)^2$ と定義する．Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$(ax_1+b)^2$	$(ax_2+b)^2$	$\cdots$	$(ax_k+b)^2$	$\cdots$	$(ax_n+b)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), E(X^2), a, b$ を用いて表せ．

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n}(a^2x_k^2 + 2abx_k + b^2)p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^2x_k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} 2abx_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b^2 p_k \\
&= a^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k + 2ab\sum_{k=1}^{n} x_k p_k + b^2\sum_{k=1}^{n} p_k \\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2
\end{aligned}
$$

b) X の分散の定義は $\mu = E(X)$ として，$V(X) = E\big((X-\mu)^2\big)$ と表すことができる．b) の結果を用いて $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことを証明せよ．

a) において $a = 1, b = -\mu$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
V(X) = E\big((X-\mu)^2\big) &= 1^2E(X^2) + 2\cdot 1\cdot(-\mu)\cdot E(X) + (-\mu)^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) - \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

2 a) 初項 a，公比 r の等比級数の第 n 項までの和は，$r \neq 1$ のとき，

$$
\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (*)
$$

で求まる．いま，$S_n = \sum_{k=1}^{n} akr^{k-1} = a + 2ar + 3ar^2 + \cdots + kar^{k-1} + \cdots + nar^{n-1}$ とおくとき，$S_n - rS_n$ を計算し，$(*)$ 式を用いて S_n を求めよ．さらに，$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
S_n &=& a &+& 2ar &+& 3ar^2 &+ \cdots +& nar^{n-1} & & \\
-)\quad rS_n &=& & & ar &+& 2ar^2 &+ \cdots +& (n-1)ar^{n-1} &+& nar^n \\
\hline
(1-r)S_n &=& a &+& ar &+& ar^2 &+ \cdots +& ar^{n-1} &-& nar^n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ (1-r)S_n &= (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - nar^n \\
&= \frac{a(1-r^n)}{1-r} - nar^n = \frac{a(1-r^n) - na(1-r)r^n}{1-r} \\
&= \frac{a\big(1-(1+n)r^n + nr^{n+1}\big)}{1-r} \\
\therefore\ S_n &= \frac{a\big(1-(1+n)r^n + nr^{n+1}\big)}{(1-r)^2}
\end{aligned}
$$

$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ だから，$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{(1-r)^2}$

b) 同様にして，$T_n = \sum_{k=1}^{n} ak^2r^{k-1} = a + 2^2ar + 3^2ar^2 + \cdots + k^2ar^{k-1} + \cdots + n^2ar^{n-1}$ とおく．このとき，$T_n - rT_n - 2S_n$ を計算することにより T_n を求めよ．さらに，$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
T_n &=& a &+& 2^2ar &+& 3^2ar^2 &+ \cdots +& n^2ar^{n-1} & & \\
-rT_n &=& &-& ar &-& 2^2ar^2 &- \cdots -& (n-1)^2ar^{n-1} &-& n^2ar^n \\
+)\quad -2S_n &=& -2a &-& 4ar &-& 6ar^2 &- \cdots -& 2nar^{n-1} & & \\
\hline
(1-r)T_n - 2S_n &=& -a &-& ar &-& ar^2 &- \cdots -& ar^{n-1} &-& n^2ar^n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ (1-r)T_n - 2S_n &= -(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - n^2ar^n \\
&= \frac{-a(1-r^n)}{1-r} - n^2ar^n = -\frac{a\big(1 + (n^2-1)r^n - n^2r^{n+1}\big)}{1-r} \\
\therefore\ (1-r)T_n &= 2S_n - \frac{a\big(1 + (n^2-1)r^n - n^2r^{n+1}\big)}{1-r} \\
&= \frac{a\big(1 + r - (n+1)^2r^n + (2n^2+2n-1)r^{n+1} - n^2r^{n+2}\big)}{(1-r)^2} \\
\therefore\ T_n &= \frac{a\big(1 + r - (n+1)^2r^n + (2n^2+2n-1)r^{n+1} - n^2r^{n+2}\big)}{(1-r)^3}
\end{aligned}
$$

$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ だから，$\lim_{n\to\infty} T_n = \dfrac{a(1+r)}{(1-r)^3}$

$\boxed{3}$ 「確率 p で成功，確率 $q = 1 - p$ で失敗」という試行を何回も繰り返すとき，最初に成功するまでの試行回数を X とする．すなわち、確率変数 X は

X	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	計
P	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$	1

という確率分布を持つとする．

a) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$\boxed{1}$ a) の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p + 2pq + 3pq^2 + \cdots + kpq^{k-1} + \cdots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

（ここで，$q = 1 - p$ より，$1 - q = p$ であることを用いた．）

b) X の分散 $V(X)$ を，公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いて求めよ．

$\boxed{1}$ b) の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p + 2^2pq + 3^2pq^2 + \cdots + k^2pq^{k-1} + \cdots \\ &= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{(2-p)}{p^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(2-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$\boxed{4}$ ある打者は，1 回の打席でヒットを打つ確率が 3 割であるとする．

a) 【復習】この打者が 10 回打席に入ったとき，ヒットを打つ回数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つ回数 X は $B(10, 0.3)$ に従うので，

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 10 \times 0.3 = 3 \\ V(X) &= npq = 10 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 2.1 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.1} \fallingdotseq 1.449 \end{aligned}$$

b) この打者がはじめてヒットを打つまでに必要な打数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つまでに凡退する回数 Y は $\boxed{2}$ の分布（幾何分布という）に従うので，

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.333\ldots \\ V(Y) &= \frac{q}{p^2} = \frac{1-0.3}{0.3^2} = 7.777\ldots \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{7.777\ldots} \fallingdotseq 2.789 \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 【分数関数の微分ができる学生用】

a) 初項 a，公比 x の無限等比級数は $|x| < 1$ のとき収束し，その和は

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

となる．この両辺を x で微分し，x をかけることにより次の式を示せ．

$$ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots = \frac{ax}{(1-x)^2}$$

各辺を微分すると

$$\left(a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots\right)' = a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots$$

$$\left(\frac{a}{1-x}\right)' = \left(a(1-x)^{-1}\right)' = -a((1-x)^{-2}(1-x)' = a(1-x)^{-2} = \frac{a}{(1-x)^2}$$

したがって

$$\begin{aligned} a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots &= \frac{a}{(1-x)^2} \\ \therefore ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots &= \frac{ax}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

b) 同様にして，$ax + 2^2ax^2 + 3^2ax^3 + \cdots + k^2ax^k + \cdots$ を求めよ．

［ヒント：a) の式の両辺を微分し，x をかけよ．］

a) の式の両辺を x で微分すると

$$\left(ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots\right)' = a + 2^2ax + 3^3ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax}{(1-x)^2}\right)' &= \left(ax(1-x)^{-2}\right)' = a(x)'(1-x)^{-2} - 2ax(1-x)^{-3}(1-x)' \\ &= a(1-x)^{-3}\left((1-x) + 2x\right) = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a + 2^2ax + 3^2ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots &= \frac{a(1+x)}{(1-x)^3} \\ \therefore ax + 2^2ax^2 + 3^2ax^3 + \cdots + k^2ax^k + \cdots &= \frac{ax(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$