1 離散確率変数

入学年度		学部	学 科		組		番　号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

一般に，結果が偶然に支配されるような実験や観測を**試行**といい，試行の数学的モデルを**確率空間**と呼ぶ．正確には，確率空間とは次の 3 つ組 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ のことである．

(1) **標本空間** Ω：試行の**結果**全体からなる集合．

(2) **事象の集合** $\mathscr{F}$：標本空間 Ω の部分集合のうちで，確率を考えることが出来る集合を**事象**と呼び，それを集めた集合（部分集合の集まり）を $\mathscr{F}$ する．

(3) **確率** P：各事象 A に実数を割り当てる関数 $P(A)$ で，次の性質を満たすものを**確率**という．

a) 任意の事象 A に対して，$0 \leqq P(A) \leqq 1$

b) $P(\Omega) = 1$

c) 事象 A と B が**排反事象**である，すなわち $A \cap B = \phi$ であるとき，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

前期の授業（基礎数学 B1）では標本空間 Ω が有限集合である場合のみについて考えた．このとき，Ω の全ての部分集合にはその確率が割り当てられ，Ω のすべての部分集合が事象であると考える．すなわち，事象全体の集合 $\mathscr{F}$ は Ω 部分集合全体 $\mathscr{P}(\Omega)$ であるとし，$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ を確率空間とする．

高校数学ではふつう，その試行おけるすべての結果は「**同程度に確からしく起こる**」と考えられるように確率モデル（= 確率空間）を設定する．そのような確率空間では事象 A の確率は $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ と定められる．しかし，必ずしもこのような確率モデルを考える必要はなく，問題によって，(3) の 3 つの性質をみたように確率を適宜設定するのであった．

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が与えられたとき，Ω 上で定義された実数値関数を**確率変数**といい，ふつう X, Y などの大文字で表す．X を確率変数とし，a を実数とするとき，Ω の部分集合 $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ は事象であるから，その確率が定義される．この確率を $P(X = a)$ と表す．Ω が有限集合であるとき，確率変数 X の取り得る値の集合も有限集合であるので，X の取り得るすべての値を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とし，それぞれの値 x_k $(k = 1, \ldots, n)$ をとる確率 $P(X = x_k)$ を p_k と書くことにする．これを下のような表にしたものを X の**確率分布**という．

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

Ω が有限集合である場合，確率変数を与えることと，確率分布をあたえることはほぼ同義と考えてよい．

確率変数 X の確率分布が上の表のように与えられたとき，X の**期待値** $E(X)$ と**分散** $V(X)$ が以下のように定義される．

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \qquad V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 p_k \quad \text{（ただし，} \mu = E(X)\text{）}$$

さらに，**標準偏差** $\sigma(X)$ を $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ と定義する．$E(X)$，$\sigma(X)$ は確率変数 X の特徴を表す量であり，これらの性質を明らかにするのが前期の目標であった．

1 確率変数 X の取り得る値は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であり，それぞれの値をとる確率は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるとする．さらに，a, b を定数とし，確率変数 Y を $Y = (aX + b)^2$ と定義する．すなわち，Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$(ax_1 + b)^2$	$(ax_2 + b)^2$	$\cdots$	$(ax_k + b)^2$	$\cdots$	$(ax_n + b)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X)$, $E(X^2)$, a, b を用いて表せ．

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} (a^2 x_k^2 + 2abx_k + b^2) p_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^2 x_k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} 2abx_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b^2 p_k \\ &= a^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k + 2ab \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + b^2 \sum_{k=1}^{n} p_k = a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \end{aligned}$$

b) X の分散の定義は $\mu = E(X)$ として，$V(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$ と表すことができる．b) の結果を用いて $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことを証明せよ．

a) において $a = 1, b = -\mu$ とおくと，

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - \mu)^2\right) = 1^2 E(X^2) + 2 \cdot 1 \cdot (-\mu) \cdot E(X) + (-\mu)^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

結果が成功か失敗かの二通りしかなく，成功する確率が p で失敗する確率が $q = 1 - p$ である試行を，独立に n 回繰り返したとき，成功する回数 X がしたがう確率分布を**二項分布**といい，$X \sim B(n, p)$ と表す．$X \sim B(n, p)$ であるとき，その期待値と分散は次のように計算できる．

$$E(X) = np, \qquad V(X) = npq = np(1 - p)$$

2 ある打者は，1 回の打席でヒットを打つ確率が 3 割であるとする．この打者が 10 回打席に入ったとき，ヒットを打つ回数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つ回数を X とすると，$X \sim B(10, 0.3)$.
したがって，$E(X) = 10 \times 0.3 = 3$, $V(X) = 10.3 \times (1 - 0.3) = 2.1$.

【裏に続く】

初項 a，公比 r の等比級数の第 n 項までの和 S_n は，$r \neq 1$ のとき，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

で求まる．いま，$|r| < 1$ であれば，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ だから，S_n も収束し，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$$

ここで，r を変数だと思って x と書き直すと，

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

この両辺を微分する (左辺は項別に微分してよいことを認める）と，$\left(\frac{a}{1-x}\right)' = \frac{a}{(1-x)^2}$ より

$$a + 2ax + 3ax^2 + 4ax^3 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots = \frac{a}{(1-x)^2}$$

となる．この両辺に x をかけると，

$$\sum_{k=1}^{\infty} kax^k = ax + 2ax^2 + 3ax^3 + 4ax^4 + \cdots + kax^k + \cdots = \frac{ax}{(1-x)^2}$$

さらに，この両辺を微分し，次の式を得る．

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 ax^{k-1} = ax + 2^2 ax^2 + 3^2 ax^1 + 4^2 ax^3 + \cdots + k^2 ax^{k-1} + \cdots = \frac{a(x+1)}{(1-x)^3}$$

ここで，$\left(\frac{ax}{(1-x)^2}\right)' = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3}$ を用いた．

3 成功する確率が p で失敗する確率が $q = 1 - p$ である試行を，独立に何回も繰り返すとき，最初に成功するまでの試行回数を X とする．すなわち、確率変数 X は

X	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	計
P	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$	1

という確率分布を持つとする．

a) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

上の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p + 2pq + 3pq^2 + \cdots + kpq^{k-1} + \cdots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

（ここで，$q = 1 - p$ より，$1 - q = p$ であることを用いた．）

b) X の分散 $V(X)$ を，公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いて求めよ．

上の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p + 2^2 pq + 3^2 pq^2 + \cdots + k^2 pq^{k-1} + \cdots$$
$$= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{(2-p)}{p^2}$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(2-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

4 ある打者は，1 回の打席でヒットを打つ確率が 3 割であるとする．この打者がはじめてヒットを打つまでに必要な打数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つまでに凡退する回数 Y は 3 の分布（幾何分布という）に従うので，

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.333\ldots$$
$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-0.3}{0.3^2} = 7.777\ldots$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7.777\ldots} \fallingdotseq 2.789$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)