入学年度		学部	学 科		組		番	号		検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

$\boxed{1}$ 1 枚の硬貨を続けて 6 回投げるとき，表の出る回数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

b) 確率変数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{64}\left(0\times 1 + 1\times 6 + 2\times 15 + 3\times 20 + 4\times 15 + 5\times 6 + 6\times 1\right) = \frac{192}{64} = 3$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{64}\Big((0-3)^2\times 1 + (1-3)^2\times 6 + (2-3)^2\times 15 + (3-3)^2\times 20 \\ &\qquad + (4-3)^2\times 15 + (5-3)^2\times 6 + (6-3)^2\times 1\Big) \\ &= \frac{1}{64}\left(9+24+15+0+15+24+9\right) = \frac{96}{64} = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{2}\ (\fallingdotseq 1.22)$$

c) 数直線上に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に 1 だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に 1 だけ動かす．最初に針を原点に立てておき，硬貨を 6 回投げた後の針の座標を Y とする．Y を X を用いて表し，Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

表の出る回数が X ならば，裏は $6-X$ 回出るので，

針の座標 Y は，$Y = 1\times X + (-1)\times(6-X) = 2X-6$ と表せる．

$$E(Y) = E(2X-6) = 2E(X) - 6 = 2\times 3 - 6 = 0$$

$$V(Y) = V(2X-6) = 2^2 V(X) = 4\times\frac{3}{2} = 6$$

$$\sigma(Y) = 2\sigma(X) = 2\times\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$\boxed{2}$ ある大学では学生の数学と英語の成績の分布が次の表の通りであった．

数学＼英語	A	B	C	計
A	15 %	15 %	5 %	35 %
B	10 %	20 %	10 %	40 %
C	5 %	10 %	10 %	25 %
計	30 %	45 %	25 %	100%

いま，A= 4 点，B= 3 点，C= 2 点という換算式を用いて数学と英語の成績を点数で表し、それぞれの X，Y で表す．

a) この学生たちの数学の平均点 $E(X)$ と英語の平均点 $E(Y)$ を求めよ．

$$E(X) = 4\times 0.35 + 3\times 0.4 + 2\times 0.25 = 3.10$$

$$E(Y) = 4\times 0.3 + 3\times 0.45 + 2\times 0.25 = 3.05$$

b) Z を数学と英語から算出した GPA とする．すなわち，数学と英語の成績が，例えば (B,A) であれば，$Z\big((\mathrm{B},\mathrm{A})\big) = (3+4)/2 = 3.5$ と定義する．次の表を完成させよ．

Z	2	2.5	3	3.5	4	計
P	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15	1

c) Z の期待値 $E(Z)$ を求めよ．

$$E(Z) = 2\times 0.1 + 2.5\times 0.w + 3\times 0.3 + 3.5\times 0.25 + 4\times 0.15 = 3.075$$

d) $E(Z) = \dfrac{E(X)+E(Y)}{2}$ であることを確かめよ．

$$\frac{E(X)+E(Y)}{2} = \frac{3.10+3.05}{2} = 3.075.$$

これは c) で求めた $E(Z)$ と確かに一致している．

3 さいころを 2 回続けて投げるとき，最初に出た目の数を X_1，２回目に出た目の数を X_2 する.

a) 確率変数 X_1 の期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ を求めよ.

$$E(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V(X_1) = E(X_1)^2 - E(X_1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

b) 確率変数 Y を X_1 と X_2 の和とする．すなわち，$Y = X_1 + X_2$ とする．Y の確率分布を求めよ.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求め，$E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ であることを確かめよ

$$E(Y) = \frac{1}{36}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4 + 10\times3+11\times2+12\times1)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

一方，$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから，$E(X_1) + E(X_2) = 7$.

よって，$E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ は確かに成り立つ.

d) 確率変数 Y の分散 $V(Y)$ を定義にしたがって求め，$V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ であることを確かめよ.

$$V(Y) = \frac{1}{36}((2-7)^2\times1+(3-7)^2\times2+(4-7)^2\times3+(5-7)^2\times4+(6-7)^2\times5+(7-7)^2\times6 + (8-7)^2\times5+(9-7)^2\times4+(20-7)^2\times3+(11-7)^2\times2+(12-7)^2\times1)$$

$$= \frac{1}{36}\big(25+32+27+16+5+16+27+32+25\big) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

一方，$V(X_1) = V(X_2) = \frac{35}{12}$ だから，$V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{6}$.

よって，$V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ は確かに成り立つ.

e) 次に，確率変数 Z を X_1 と X_2 の積とする．すなわち，$Z = X_1X_2$ とする．Z の確率分布を求めよ.

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

f) 確率変数 Z の期待値 $E(Z)$ を求め，$E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ.

$$E(Z) = \frac{1}{36}(1\times1+2\times2+3\times2+4\times3+5\times2+6\times4+8\times2+9\times1+10\times2+12\times4 + 15\times2+16\times1+18\times2+20\times2+24\times2+25\times1+30\times2+36\times1)$$

$$= \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

一方，$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから，$E(X_1)E(X_2) = \frac{49}{4}$.

よって，$E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ は確かに成り立つ.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)