

1 1 枚の硬貨を続けて 5 回投げるとき, 表の出る回数を X とする.

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ.

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を定義にしたがって求めよ.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{10}{32} + 3 \times \frac{10}{32} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{1}{32} (5 + 20 + 30 + 20 + 5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2} (= 2.5) \end{aligned}$$

c) 分散 $V(X)$ は $E(X) = \mu$ において $V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 p_k$ と定義されるのであった. この定義を直接用いて $V(X)$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} V(X) &= (0 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{1}{32} + (1 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{5}{32} + (2 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{10}{32} \\ &\quad + (3 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{10}{32} + (4 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{5}{32} + (5 - \frac{5}{2})^2 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{1}{32} + \frac{9}{4} \times \frac{5}{32} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{32} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{32} + \frac{9}{4} \times \frac{5}{32} + \frac{25}{4} \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{25 + 45 + 10 + 10 + 45 + 25}{4 \times 32} = \frac{5}{4} (= 1.25) \end{aligned}$$

d) 確率変数 X^2 の確率分布を求めよ.

X	0	1	4	9	16	25	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

e) 確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2) - E(X)^2$ を計算し, $E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$ であることを確かめよ.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{10}{32} + 9 \times \frac{10}{32} + 16 \times \frac{5}{32} + 25 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{1}{32} (5 + 40 + 90 + 80 + 25) = \frac{240}{32} = \frac{15}{2} (= 7.5) \end{aligned}$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30 - 25}{4} = \frac{5}{4}$$

これは d) で求めた $V(X)$ と一致する.

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

2 X は, $x_1, x_2, \dots, x_n$ という値をとる確率が, それぞれ $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるような確率変数であるとする. このとき, 期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$ で定義されるのであった. いま, a, b を定数とすると, 確率変数 Y を $Y = (aX + b)^2$ と定義する. Y は下のような確率分布をもつ確率変数である.

Y	$(ax_1 + b)^2$	$(ax_2 + b)^2$	$\dots$	$(ax_k + b)^2$	$\dots$	$(ax_n + b)^2$	計
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), E(X^2), a, b$ を用いて表せ.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b)^2 p_k = \sum_{k=1}^n (a^2 x_k^2 + 2abx_k + b^2) p_k \\ &= \sum_{k=1}^n a^2 x_k^2 p_k + \sum_{k=1}^n 2abx_k p_k + \sum_{k=1}^n b^2 p_k \\ &= a^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k + 2ab \sum_{k=1}^n x_k p_k + b^2 \sum_{k=1}^n p_k \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \end{aligned}$$

b) X の分散の定義は $\mu = E(X)$ として, $V(X) = E((X - \mu)^2)$ と表すことができる. a) の結果を用いて $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことを証明せよ.

a) において $a = 1, b = -\mu$ とおくと,

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) = 1^2 E(X^2) + 2 \cdot 1 \cdot (-\mu) \cdot E(X) + (-\mu)^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

3 2個のサイコロを投げるとき、出た目の数のうち大きい方を X とする。

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ 、分散 $V(X)$ 、標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{36} (1 \times 11 + 2 \times 9 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 3 + 6 \times 1) \\ &= \frac{91}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{36} (1 \times 11 + 4 \times 9 + 9 \times 7 + 16 \times 5 + 25 \times 3 + 36 \times 1) \\ &= \frac{301}{36} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2555}}{36}$$

4 1 から 6 までの番号をつけた 6 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを引くとき、引いたカードの番号の大きい方を X とする。

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ 、分散 $V(X)$ 、標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{15} (2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5) \\ &= \frac{70}{15} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{15} (4 \times 1 + 9 \times 2 + 16 \times 3 + 25 \times 4 + 36 \times 5) \\ &= \frac{350}{15} = \frac{70}{3} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$