

1 箱には赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている。箱の中から無作為に 1 個の玉を選び、その玉を元へ戻さず無作為にもう 1 個の玉を選ぶ。最初に選んだ玉が赤であるという事象を A 、2 番目に選んだ玉が赤であるという事象を B とする。

a) $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$, $P_A(\bar{B})$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ をそれぞれ求めよ。

最初に選んだ球が赤なら箱の中には赤 1 個と白 3 個が残るので、このときまた赤を選ぶ確率は

$$P_A(B) = \frac{1}{4}. \text{ 同様にして, } P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{2}, P_A(\bar{B}) = \frac{3}{4}, P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{1}{2}$$

b) $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ をそれぞれ求め、次の表の空欄を埋めよ。

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}, P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

2 個目 \ 1 個目	赤 (B)	白 ($\bar{B}$)	計
赤 (A)	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
白 ($\bar{A}$)	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
計	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

c) 2 個目の玉が白であったとして、最初の玉が赤である確率を求めよ。

$$\text{求める確率は } P_{\bar{B}}(A) \text{ であり, } P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

d) 2 個の玉が同色であったとして、その玉の色が赤である確率を求めよ。

$$\text{2 個の玉が同色であるという事象を } C \text{ とすると, } C = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ であるから,}$$

$$P(C) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{従って, 求める確率は } P_C(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

2 ある国では、男性 1000 人に 1 人の割合である病気に感染しているという。検査薬を用いると、感染していれば 0.98 の確率で陽性反応が出る。一方、感染していない場合にも 0.01 の確率で陽性反応が出るという。この病気に感染しているという事象を A 、検査薬によって陽性反応が出るという事象を B とする。

a) 事象 A , B , $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ の確率をそれぞれ求め、表にまとめよ。

$$\text{問題文より, } P(A) = 0.001, P_{\bar{A}}(B) = 0.98, P_{\bar{A}}(B) = 0.01.$$

$$\text{従って, } P(\bar{A}) = 0.999$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0.98 \times 0.001 = 0.00098$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = 0.999 \times 0.01 = 0.00999$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.001 - 0.00098 = 0.00002$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = 0.999 - 0.00999 = 0.98901$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.00098 + 0.00999 = 0.01097$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.00002 + 0.98901 = 0.98903$$

検査 \ 病気	陽性	陰性	計
感染	0.00098	0.00002	0.001
非感染	0.00999	0.98901	0.999
計	0.01097	0.98903	1

b) ある男性が検査を行ったところ、陽性であった。この男性が実際に病気に感染している確率はおおよそどれくらいか。答えはパーセンテージで表し、小数第 2 位で四捨五入した値で示せ。

$$\text{求める確率は } P_B(A) \text{ であり, } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.00098}{0.01097} \approx 0.0893$$

すなわち、検査で陽性であっても、実際に病気に感染している確率は約 9% に過ぎない。

3 c, o, f, f, e, e の文字が 1 字ずつ書かれた 6 枚のカードが入っている箱がある。この箱の中から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し、順に 1 列に並べる。標本空間 Ω は、すべての結果が同様に確からしくなるように、2 つのと e を区別して、6 枚のカード c, o, f₁, f₂, e₁, e₂ を並べる順列全体とする。そして、e₁ と e₂ が隣り合う事象を A 、両端に子音 (c, f₁, f₂) がくる事象を B とする。

a) $n(\Omega)$, $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} n(\Omega) &= 6! = 720 \\ n(A) &= 5! \times 2! = 240 \\ n(B) &= {}_3P_2 \times 4! = 144 \\ n(A \cap B) &= {}_3P_2 \times 3! \times 2! = 72 \end{aligned}$$

b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5} \\ P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

c) 事象 A と B が独立であるかどうかを判定せよ。

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \text{ であるが,} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{10} \text{ であるので, } P(A)P(B) \neq P(A \cap B). \\ \text{従って, 事象 } A \text{ と } B \text{ は独立ではない.} \end{aligned}$$

4 大小 2 個のさいころを同時に投げる。大小どちらかのさいころの目が奇数である事象を A 、2 つのさいころの目の差の絶対値が 2 以下である事象を B とする。

a) 確率 $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ を求めよ。

大\小	1	2	3	4	5	6
1	AB	AB	AB	A	A	A
2	AB		AB		A	
3	AB	AB	AB	AB	AB	A
4	A	B	AB	B	AB	B
5	A	A	AB	AB	AB	AB
5	A		A	B	AB	B

$$\begin{aligned} \text{左の表より,} \\ P(A) &= \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \\ P(A \cap B) &= \frac{17}{36} \\ P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{17}{27} \end{aligned}$$

b) 2 つのさいころの目の差が 2 以下であるとき、大小どちらかのさいころの目が奇数である確率を求めよ。

求める確率は $P_B(A)$.

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \text{ だから,} \\ P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{17}{36}}{\frac{2}{3}} = \frac{17}{24} \end{aligned}$$

c) 事象 A と B は独立であるかどうかを判定せよ。

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \text{ であるが,} \\ P(A \cap B) &= \frac{17}{36} \text{ であるので, } P(A)P(B) \neq P(A \cap B). \\ \text{従って, 事象 } A \text{ と } B \text{ は独立ではない.} \end{aligned}$$