

1 2つの壺があり、片方の壺 1 には赤い球が 9 個と白い球が 1 個、もう一方の壺 2 には赤い球 1 個と白い球が 9 個入っている。いま無作為に壺を選び、1 個の球を取り出してその色を調べ、その球をとり出した壺に戻して、もう一度同じ壺から球を取り出すという試行を考える。

この試行において「まず壺 1 を選び、最初に選んだ球が赤、2 度目に選んだ球が白である」という結果を $(1, R, W)$ と表すこととして、標本空間 Ω を

$$\Omega = \{(1, R, R), (1, R, W), (1, W, R), (1, W, W), \\ (2, R, R), (2, R, W), (2, W, R), (2, W, W)\}$$

と定める。

a) この確率モデルにおいて、 $P(\{(1, R, R)\}), P(\{(2, R, R)\})$ はそれぞれどのような値であるか。

$$P(\{(1, R, R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{200} \\ P(\{(2, R, R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{200}$$

b) 「最初に選んだ球は赤である」という事象を A 、「2 度目に選んだ球は赤である」という事象を B とする。 A 、 B をそれぞれ外延的記法で表せ。

$$A = \{(1, R, R), (1, R, W), (2, R, R), (2, R, W)\} \\ B = \{(1, R, R), (1, W, R), (2, R, R), (2, W, R)\}$$

c) 「最初に選んだ球は赤であり、2 度目に選んだ球も赤である」という事象は $A \cap B$ と表せるが、その確率 $P(A \cap B)$ をもとめよ。

$$P(A \cap B) = P(\{(1, R, R), (2, R, R)\}) \\ = P(\{(1, R, R)\}) + P(\{(2, R, R)\}) \\ = \frac{81}{200} + \frac{1}{200} = \frac{82}{200} = \frac{41}{100}$$

d) 事象 A をあらためて標本空間とみなして Ω_A とおき、新たな確率モデルを考える。このとき「2 度目に選んだ球も赤である」という事象を Ω_A の事象、すなわち Ω_A の部分集合とみたとき、これを外延的記法で表せ。またこの事象の確率はこの新たなモデルでどのようになるか。

「2 度目に選んだ球も赤である」という事象を B とおくと、

$$B = \{(1, R, R), (2, R, R)\} \subset \Omega_A = \{(1, R, R), (1, R, W), (2, R, R), (2, R, W)\}$$

この新たなモデルにおける確率を P_A と書くと、

$$P_A(B) = \frac{P(\{(1, R, R), (2, R, R)\})}{P(A)} = \frac{\frac{41}{100}}{\frac{81}{200} + \frac{9}{200} + \frac{1}{200} + \frac{9}{200}} = \frac{41}{50}$$

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

2 ある大学の学生の数学と英語の成績分布は次の表の通りであった。

	英語	A	B	C
数学				
A		15%	15%	5%
B		10%	20%	10%
C		5%	10%	10%

この学生の中から無作為に 1 人を選んで、その学生の数学と英語の成績を尋ねるという試行において、標本空間 Ω を $\Omega = \{(X, Y) \mid X \text{ は数学の成績, } Y \text{ は英語の成績}\}$ と設定する。そして、数学の成績が A であるという事象を M 、英語の成績が A であるという事象を E とする。

a) 事象 M をあらためて標本空間とみなし、 Ω_M とおく。 Ω_M を外延的記法で表せ。

$$\Omega_M = \{(A, A), (A, B), (A, C)\}$$

b) Ω_M を標本空間とすると、 Ω_M の各事象 N についてその確率を $P_M(N)$ と書く。事象 $\{(A, A)\}$, $\{(A, B)\}$, $\{(A, C)\}$ の確率 $P_M(\{(A, A)\})$, $P_M(\{(A, B)\})$, $P_M(\{(A, C)\})$ をそれぞれ求めよ。

$$P_M(\{(A, A)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \\ P_M(\{(A, B)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \\ P_M(\{(A, C)\}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

c) こんどは事象 E を標本空間とみなし、 Ω_E とする。 Ω_E を外延的記法で表せ。

$$\Omega_E = \{(A, A), (B, A), (C, A)\}$$

d) ある学生を選んだとき、その学生の英語の成績は A であった。この学生の数学の成績が C である確率を求めよ。

英語の成績が A である中での確率だから、標本空間 Ω_E で考える。

$$\Omega_E \text{ の中で数学の成績が C である確率は } P_E(\{(C, A)\}) = \frac{5}{15 + 10 + 5} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

3] ある会社で同じ製品を 2 つの工場 X, Y で製造していて、製品に不良品が含まれる確率は、工場 X では 4%、工場 Y では 5% であるという。いま、工場 X の製品 1000 個と工場 Y の製品 800 個がある。

a) 下の表を完成させよ。

工場 \ 良・不良	良品	不良品	計
X	960 個	40 個	1000 個
Y	760 個	40 個	800 個
計	1720 個	80 個	1800 個

これら 1800 個の製品の中から無作為に 1 個を取り出すとき、取り出した製品が X で製造された良品であることを $(X, \text{良})$ などと表すことにし、この試行の標本空間を $\Omega = \{(X, \text{良}), (X, \text{不良}), (Y, \text{良}), (Y, \text{不良})\}$ とおく。

b) 取り出した製品が工場 X の良品である確率 $P(\{(X, \text{良})\})$ を求めよ。

上の表より、製品は全部で 1800 個あり、 X で製造された良品は 960 個あるから、

$$P(\{(X, \text{良})\}) = \frac{960}{1800} = \frac{8}{15}$$

c) 取り出した製品が良品であるという事象を A とする。 A を外延的記法で表し、 $P(A)$ を求めよ。

上の表より、製品は全部で 1800 個あり、良品は 1720 個あるから、

$$P(A) = \frac{1720}{1800} = \frac{43}{45}$$

d) これら 1800 個の製品の中から 1 個を取り出したとき、それは良品であった。このとき、この製品が工場 X で生産されていた確率を求めよ。

上の表より、良品は全部で 1720 個あり、そのうち工場 X で生産されたものは 960 個あるから、

$$P(A) = \frac{960}{1720} = \frac{24}{43}$$

4] ある街でタクシーによるひき逃げ事故があった。その街にはそれぞれ緑色のタクシーと青色のタクシーを使っている 2 つのタクシー会社がある。その街で走っているタクシーの 85% は緑色のタクシーであり、15% は青色のタクシーである。目撃者はひき逃げタクシーは青色であったと証言した。その時間帯のその場所でその証言の識別力を調べたところ、緑色と青色のタクシーのそれぞれに対して、常に 80% は正しく識別できることが明らかになった。さて、事故を起こしたタクシーが本当に青色タクシーであった確率は求めたい。

a) 例えば、実際のタクシーの色が緑色なのに目撃者が青色であると識別する事象を (G, B) と表すことにし、標本空間 $\Omega = \{(G, G), (G, B), (B, G), (B, B)\}$ とする。このとき、 $P(\{(G, G)\})$, $P(\{(G, B)\})$, $P(\{(B, G)\})$, $P(\{(B, B)\})$ をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} P(\{(G, G)\}) &= 0.85 \times 0.8 = 0.68 & P(\{(G, B)\}) &= 0.85 \times 0.2 = 0.17 \\ P(\{(B, G)\}) &= 0.15 \times 0.2 = 0.03 & P(\{(B, B)\}) &= 0.15 \times 0.8 = 0.12 \end{aligned}$$

b) 次の表の空欄を埋めよ。

タクシー \ 証言	緑	青	計
緑	68 %	17 %	85 %
青	3 %	12 %	15 %
計	71 %	29 %	100 %

c) 「目撃者が青色であると証言する」という事象を A とする。 A を外延的記法で表し、その確率 $P(A)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} A &= \{(G, B), (B, B)\} \\ P(A) &= 0.17 + 0.12 = 0.29 \end{aligned}$$

d) 「タクシーの色が青である」という事象を B とする。目撃者が青色であると証言したとき、実際にタクシーの色が青である確率 $P_A(B)$ を求めよ。

$$P_A(B) = \frac{P(\{(B, B)\})}{P(A)} = \frac{0.12}{0.29} = \frac{12}{29} \approx 0.414$$

すなわち、事故を起こしたタクシーが青色のタクシーである確率は約 40% 程度でしかなく、この目撃者の証言だけから青色のタクシーが事故を起こしたと断定するのは危険である。

【この問題の出典：市川伸一著「考えることの科学」（中公新書）】