

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

● 前回のまとめ

一般に、結果が偶然に支配されるような実験や観測を**試行**といい、試行の数学的モデルを**確率空間**と呼ぶ。確率空間は次の 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のことをいう。

1. **標本空間 Ω** ：試行の**結果**全体からなる集合。
2. **事象の集合 $\mathcal{F}$** ：標本空間 Ω の部分集合のうちで、確率を考えることが出来る集合を**事象**と呼び、それを集めた集合（部分集合の集まり）を $\mathcal{F}$ する。
3. **確率 P** ：各事象 A に実数を割り当てる関数 $P(A)$ で、次の性質を満たすものを**確率**という。
 - i) 任意の事象 A に対して、 $0 \leq P(A) \leq 1$
 - ii) $P(\Omega) = 1$
 - iii) 事象 A と B が排反事象であるとき、すなわち $A \cap B = \phi$ であるとき、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

この授業では標本空間 Ω が有限集合である場合のみについて考える。このとき、 Ω の全ての部分集合にはその確率が割り当てられると考え、 Ω のすべての部分集合が事象であるとする。すなわち、事象全体の集合 $\mathcal{F}$ は Ω 部分集合全体 $\mathcal{P}(\Omega)$ とし、 $(\Omega, (\Omega), P)$ を確率空間とする。

高校数学では常に行われるように、一般的な確率空間（＝ 確率モデル）では、その試行おけるすべての結果は「同程度に確からしく起こる」と考えられるようにモデルを設定する。そのようなモデルでは事象 A の確率は $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ と定められる。しかし、必ずしもこのようなモデルを考える必要はない。

例 1. 2 個のコインを同時に投げる試行では、2 個のコインを区別して、コイン 1 の裏表、コイン 2 の裏表を順に表し、標本空間を $\Omega = \{ \text{表表, 表裏, 裏表, 裏裏} \}$ という 4 つの元からなる集合を標本空間とするのが一般的である。その場合すべての結果は同程度に確からしく起こると考えられ、

$$P(\{ \text{表表} \}) = P(\{ \text{表裏} \}) = P(\{ \text{裏表} \}) = P(\{ \text{裏裏} \}) = \frac{1}{4}$$

となる。（確率は結果に対してではなく、事象に対して定義されるものなので、 $P(\text{表表})$ は定義されず、 $P(\{ \text{表表} \})$ のみが定義されることに注意。）

一方、同じ試行について別のモデル（確率空間）を設定することもできる。例えば、試行の結果を表の出た枚数で表し、標本空間を $\Omega' = \{ \text{表 2 枚, 表 1 枚, 表 0 枚} \}$ と設定する。ただし、このとき全ての結果は同様に確からしいとは考えられずないので、上のモデルと整合性をとるために

$$P(\{ \text{表 2 枚} \}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{ \text{表 1 枚} \}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{ \text{表 0 枚} \}) = \frac{1}{4}$$

と定義する。そして、「表が少なくとも 1 枚出る」という事象 A は $A = \{ \text{表 2 枚, 表 1 枚} \}$ と外延的に表すことができ、

$$P(A) = P(\{ \text{表 2 枚} \}) + P(\{ \text{表 1 枚} \}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

となる。

この単純な例では、このようなモデルを設定するメリットはあまり感じられないかもしれないが、今後、後者のようなモデルを考えることが必要不可欠になることを見ていく。

1 同じ形状の 2 個のさいころを同時に投げる試行について 2 つの確率空間を考える。

a) まず、2 つのさいころを区別し、例えば、さいころ 1 の出た目が 3 で、さいころ 2 の出た目が 2 であるとき、その結果を $(2, 3)$ で表すことにする。

i) このとき標本空間 Ω をを上記の記号を用いて外延的記法で表せ。

$$\Omega = \{(m, n) \mid n, m \text{ は } 6 \text{ 以下の正の整数}\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

ii) Ω の要素の個数 $n(\Omega)$ は何か。また、異なる事象の個数は全部でいくつあるか。

$$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36, \text{ 異なる事象の個数} = n(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{36}$$

iii) 「目の積が奇数である」という事象を A とする。 A を外延的記法によって表せ。

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

iv) 事象 A の確率 $P(A)$ を求めよ。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

v) A の余事象 $\bar{A}$ を内包的記法で表せ。また、 $P(\bar{A})$ を求めよ。

$$\bar{A} : \text{「目の積が偶数である} = \text{「どちらか一方の目は偶数である」,} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

b) 次に、2 つのさいころを区別せず、出た目の数を小さい順に並べて表すことにする。例えば、1 つのさいころの目は 3 で、もう 1 つのさいころの目は 2 であるとき、その結果を $(2, 3)$ で表し、2 つのさいころの目がともに 3 のときは $(3, 3)$ と表すことにする。

i) このときの標本空間 Ω' を上記の記号を用いて外延的記法で表せ。

$$\Omega' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

ii) Ω' の要素の個数 $n(\Omega')$ は何か。また、この場合異なる事象の個数は全部でいくつか。

$$n(\Omega') = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

iii) 確率 $P(\{(2, 3)\})$, $P(\{(3, 3)\})$ はそれぞれどのように定めるべきか。

$$P(\{(2, 3)\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}, \quad P(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

iv) 「目の和が 3 以下である」という事象を B とする。 B を Ω' の部分集合として外延的記法で表せ。

$$B = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

v) $P(B)$ と、 $\frac{n(B)}{n(\Omega')}$ をそれぞれ求めよ。

$$P(B) = P(\{(1, 1)\}) + P(\{(1, 2)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{n(B)}{n(\Omega')} = \frac{2}{21}$$

2 J, K, L, M の 4 人が左から一列に並んだ 4 つのいすに座る. J が K より左に座る事象を A , K が L より左に座る事象を B とする.

a) 標本空間 Ω をどのように設定したらよいか. また, そのとき Ω の要素の個数 $n(\Omega)$ は何か.

J, K, L, M を 1 列に並べる順列の全体からなる集合を Ω とする. 外延的記法で表せば,
 $\Omega = \{ JKLM, JKML, JMKL, JMLK, JKLM, JKML, KJLM, KJML, KLJM, KLMJ, KMJL, KMLJ, LJKM, LJMK, LKJM, LKMJ, LMJK, LMKJ, MJKL, MJLK, MKJL, MKLJ, MLJK, MLKJ \}$
 $n(\Omega) = 4! = 24$

b) 事象 $A \cap B$ を外延的記法 (要素を並べる方法) で表現し, $n(A \cap B)$ を求めよ.

まず, J, K, L をこの順に並べ, M をこの間のどこかに配置する方法を考える.
 $A = \{ JKLM, JMKL, JKML, MJKL \}$
 $n(A \cap B) = 4$

c) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ をそれぞれ求めよ.

$B = \overline{A}$, すなわち B は A の余事象であるから, $P(A) + P(B) = 1$.
また, 対称性により A と B の要素の間には 1 対 1 に対応が付けられるから,
 $n(A) = n(B)$ が成り立ち, $P(A) = P(B)$. したがって, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$
 $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

3 1 つの箱に赤球 3 個と白球 2 個がはいっている. A, B 二人が, A からはじめて交互に箱の中から任意に 1 球ずつを取り出し, 先に白球を取り出したものを勝ちとする. ただし, 取り出した球は箱に戻さないものとする.

a) 標本空間 Ω をどのように設定したらよいか.

箱から取り出され球の色を順に並べて書いて,
 $\Omega = \{ \text{白}, \text{赤白}, \text{赤赤白}, \text{赤赤赤白} \}$ と定義すればよい.

[別解] 「すべての結果は同様に確からしい」と言えるように, 3 つの赤球を区別し, 赤₁, 赤₂, 赤₃, 2 つの白球も区別し, 白₁, 白₂ とする. そして, $\Omega = \{ \text{赤}_1, \text{赤}_2, \text{赤}_3, \text{白}_1, \text{白}_2 \}$ の順列全体 とする. (「すべての結果は同様に確からしい」と言えるようにするには, 白球が取り出されて勝敗が決定した後も球を取り出し続けることにしないといけない.)

b) A が勝つという事象を外延的記法で表せ.

$A = \{ \text{白}, \text{赤赤白} \}$

(上の [別解] のように Ω を設定すると, A を外延的記法で表すのはかなり面倒になる. 実際, A は 72 個の要素を持つ.)

c) A が勝つ確率を求めよ.

$P(\{ \text{白} \}) = \frac{2}{5}$, $P(\{ \text{赤赤白} \}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ だから,
 $P(A) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$