

基礎数学 B1	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 4 限 担当: 鎌田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく、途中の計算や説明も簡潔に加えること。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

1 実数全体の集合 U の部分集合 A, B を次のように定める。

$$A = \{x \mid x^2 + 2x \leq 3\},$$

$$B = \{x \mid |x - 2| > a\}$$

ただし、 a は正の定数とする。

- a) $A \cap B = \phi$ となるような a の範囲を求めよ。
- $$x^2 + 2x \leq 3 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1,$$
- $$|x - 2| > a \Leftrightarrow x < 2 - a, \text{ または } x > 2 + a \text{ だから,}$$
- $$A \cap B = \phi \text{ となるのは, } 1 \leq a + 2 \text{ かつ } 2 - a \leq 3. \text{ すなわち } a \geq 5 \text{ のとき.}$$
- b) $\overline{B} \subset A$ となるような a の範囲を求めよ。
- $$\overline{B} = \{x \mid 2 - a \leq x \leq 2 + a\} \text{ だから,}$$
- $$\overline{B} \text{ は } 2 \text{ を必ず含む. しかし } 2 \notin A \text{ だから, } \overline{B} \subset A \text{ となる } a \text{ の範囲は空集合.}$$

2 袋の中に赤いサイコロが 3 個と白のサイコロが 2 個入っている。この袋から無作為にサイコロを 1 つ選び、それを投げるという試行を行う。この試行において、選んだサイコロが赤であることを R 、白であることを W で表し、たとえば、白いサイコロを選び、それを投げて出た目の数が 3 であるという結果を $(W, 3)$ という記号で表すとする。

- a) この試行の標本空間 Ω を上の記号を用いて表せ。
- $$\Omega = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), \\ (W, 1), (W, 2), (W, 3), (W, 4), (W, 5), (W, 6)\}$$
- b) ある試行について、その標本空間の部分集合をすべて事象と呼ぶのであった。この試行に関する事象をすべて数え上げると何通りあるか。
- 事象は Ω の部分集合の数だけある。 $n(\Omega) = 12$ なので、 Ω の部分集合の総数は $2^{12} = 4096$ 。
- c) $P(\{(R, 3)\})$ を求めよ。
- $$P(\{(R, 3)\}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$
- d) 「赤いサイコロを選び、出た目の数は奇数である」という事象を A とする。 A を表す集合を上の記号を用い、外延的記法（要素をすべて並べて表す表し方）によって表せ。
- $$A = \{(R, 1), (R, 3), (R, 5)\}$$
- e) 「投げたサイコロの出た目の数が 3 以下である」という事象を B とするとき、 $A \cap B$ を表す集合を外延的記法によって表せ。
- $$A \cap B = \{(R, 1), (R, 3)\}$$
- f) 確率 $P(A), P(B), P(A \cap B)$ を求めよ。
- $$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$
- $$P(B) = \frac{1}{2}$$
- $$P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$
- g) 事象 A と事象 B は独立であるかどうかを判定せよ。
- $$P(A)P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \neq \frac{1}{5} = P(A \cap B) \text{ だから, } A \text{ と } B \text{ は独立ではない.}$$

3 事象 A, B について、 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ であるとする。

- a) $P(A \cup B) = a$ としたとき、 $P(A \cap B)$ を a で表し、 a の取り得る値の範囲を求めよ。
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ より,}$$
- $$P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - a = \frac{7}{12} - a.$$
- 確率は 0 と 1 の間の値をとるから、 $0 \leq \frac{7}{12} - a \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{19}{12} \leq a \leq \frac{7}{12}$ 。
- また、 $A \subset A \cup B$ より、 $P(A) \leq P(A \cup B)$ だから $\frac{1}{3} \leq a$ 。
- 以上より、 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{7}{12}$ 。
- b) 事象 A と B が独立となるための a の値を求めよ。
- A と B が独立となるためには、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ であることが必要十分。これは $\frac{7}{12} - a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ と同値。これを解いて $a = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

4 1 から 6 までの数がそれぞれ書かれている 6 枚のカードから、無作為に同時に 3 枚のカードを取り出す。このとき、取り出したカードに書かれている数のうち最も小さいものを X とする。

- a) 3 枚のカードの取り出し方は全部で何通りあるか。
- 6 枚から 3 枚を選ぶ組み合わせの数だけあるから、
- $${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 通り.}$$
- b) 取り出した 3 枚のうち、1 が最小の数になる場合は何通りあるか。
- 1 を除いた 5 枚から 2 枚をを選ぶ組み合わせの数だけあるから、
- $${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り.}$$
- c) X の確率分布を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

- d) X の期待値と分散を求めよ。
- $$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{3}{20} + 4 \times \frac{1}{20} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$$
- $$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{3}{20} + 4^2 \times \frac{1}{20} = \frac{77}{20}$$
- $$V(X) = \frac{77}{20} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{63}{80}$$
- e) 確率変数 Y を $Y = aX + b$ で定める。ただし、 a, b は定数で、 $a > 0$ とする。 Y の期待値が 0、分散が 1 となるような a, b の値を求めよ。
- $$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 0,$$
- $$V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X) = 1 \text{ より,}$$
- $$\frac{7}{4}a + b = 0, a^2 \frac{63}{80} = 1 \text{ を解いて,}$$
- $$a = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{4\sqrt{35}}{21}, b = -\frac{\sqrt{35}}{3}$$

5] ある疾患に罹患している潜在的な罹患率は 0.1% と推測されている。この疾患に罹患しているかどうかを判定するある検査の感度（罹患している人のうち、検査が陽性となる割合）は 90% で、特異度（罹患していない人が検査で陰性となる割合）は 80% とする。この疾患に罹患しているという事象を A 、検査で陽性判定が出たという事象を B として、以下の問いに答えよ。

a) 問題文から直接 $P(A)$, $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ を求め、小数で答えよ。

$$P(A) = 0.001$$

$$P_A(B) = 0.9$$

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0.8$$

b) $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ を求め、小数で答えよ。

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0.001 \times 0.9 = 0.0009$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0.999 \times 0.8 = 0.7992$$

c) 疾患に罹患してい患者と検査で陽性判定を受けた人の割合を示す一覧表を完成させよ。

検査 \ 疾患	有 (A)	無 ($\bar{A}$)	計
陽性 (B)	0.09 %	19.98 %	20.07 %
陰性 ($\bar{B}$)	0.01 %	79.92 %	79.93 %
計	0.1 %	99.9 %	100 %

d) このような状況の中での検査の陽性的中率（陽性判定が出た人の中で本当に感染している人の割合）を求めよ。答えはパーセンテージで表せ。

$$\text{求める確率は } P_B(A) = P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}.$$

上の表より、 $P(B \cap A) = 0.0009$, $P(B) = 0.2007$ なので、 $P_B(A) = 0.00448 \dots$ 。したがって、求める確率は約 0.45%。

6] 一般に、確率変数 X と定数 a, b に対し $E(aX + b) = aE(X) + b$ が成り立つ。確率変数 X の分散 $V(X)$ は、 $E(X) = \mu$ とおいて、 $V(X) = E((X - \mu)^2)$ で定義される。これらより

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

であることを証明せよ。

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

7] サッカーのペナルティーキックの成功率は約 75% であるという。ペナルティーキックを蹴るチャンスが 200 回あったとき、その成功回数を X とする。 X の期待値と分散を求めよ。また、標準偏差は 6 より大きい小さいかを答えよ。

$$\begin{aligned} X &\sim B(200, 0.75) \text{ だから,} \\ E(X) &= 200 \times 0.75 = 150 \\ V(X) &= 200 \times 0.75 \times (1 - 0.75) = 37.5 \\ \text{また, } \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{37.5} \text{ であり,} \\ \sqrt{37.5} &> \sqrt{36} = 6 \text{ なので, 標準偏差は 6 より大きい.} \end{aligned}$$

8] 座標平面上を動く点 P がある。点 P は原点 O から出発して、サイコロを投げた結果によって次のように移動する。

偶数の目が出たら x 軸方向に $+2$, y 軸方向に $+1$ だけ移動し、
奇数の目が出たら x 軸方向に -1 , y 軸方向に -2 だけ移動する。

サイコロを 10 回投げ終わったとき、偶数の目が出た回数を Z とし、そのときの P の x 座標を X , y 座標を Y とする。以下の問いに答えよ。

a) Z は二項分布に従う。その分布を $B(n, p)$ の形で表せ。

$$Z \sim B(10, \frac{1}{2})$$

b) Z の期待値と分散を求めよ。

$$\begin{aligned} E(Z) &= 10 \times \frac{1}{2} = 5 \\ V(Z) &= 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

c) X, Y をそれぞれ Z の式で表せ。

$$\begin{aligned} 10 \text{ 回投げ終わったとき, 奇数の目が出た回数は } 10 - Z \text{ 回なので,} \\ X &= 2Z + (-1)(10 - Z) = 3Z - 10 \\ Y &= Z + (-2)(10 - Z) = 3Z - 20 \end{aligned}$$

d) X, Y の期待値と分散をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} E(X) &= E(3Z - 10) = 3E(Z) - 10 = 3 \times 5 - 10 = 5 \\ V(X) &= V(3Z - 10) = 3^2 V(Z) = 9 \times \frac{5}{2} = \frac{45}{2} = 22.5 \\ E(Y) &= E(3Z - 20) = -3E(Z) + 20 = 3 \times 5 - 20 = -5 \\ V(Y) &= V(3Z - 20) = 3^2 V(Z) = 9 \times \frac{5}{2} = \frac{45}{2} = 22.5 \end{aligned}$$

— 以上 —