

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

さいころを投げてでための数を数えたり、駅に到着してから電車が来るまでの待ち時間を計ったりするような実験や観測を行うとき、その結果は偶然に支配されているいろいろ変わり、どの結果が得られるかはを予測することはできない。しかし、このような実験や観測を多数くり返すと、得られた結果は一見でたらめにみえるが、そこにある種の規則性が現れる。このような規則性を理解するには、まず現象を数学的に扱いやすい抽象的な形にモデル化し、そのモデルを調べるという方法をとるのが一般的である。モデルが理解できた後で、このモデルと現実の現象がどう対応しているのかについて考えるのである。

一般に、何回もくり返すことができ、その結果が偶然に支配されるような実験や観測を**試行** (trial) といい、試行の結果として起こりうるものを**結果** (outcome)、**根元事象** (elementary event)、あるいは**標本点**などと呼ぶ。標本点の全体からなる集合を**標本空間** (sample space) といい、しばしば記号 Ω で表される。

ここでは、 Ω が有限集合である場合のみについて考える。このとき、標本空間 Ω の任意の部分集合のことを**事象** (event) といい、試行の結果が事象 A に属するとき、「事象 A が起こった」という。また、標本空間全体を**全事象**、決して起こらない事柄は空集合 ϕ で表され、それを**空事象**という。

例 1. 1 個のコインを投げる試行では標本空間は $\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$ という集合で表せる。そして、このとき、この試行に関する事象は $\phi, \{\text{表}\}, \{\text{裏}\}, \{\text{表}, \text{裏}\}$ の計 4 つである。

例 2. 1 個のサイコロを投げる試行では、標本空間は $\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$ という 6 個の要素からなる集合である。 Ω の任意の部分集合が 1 個のサイコロを投げる試行に関する事象であり、 Ω の部分集合は全部で $2^6 = 64$ 個あるので、1 個のサイコロを投げる試行には 64 通りの事象が考えられることになる。

1 1 枚の硬貨を 2 回投げる試行において、表が出ることを H、裏が出ることを T で表す。1 枚の硬貨を 2 回投げる試行において、例えば 1 回目に表、2 回目に裏が出ることを HT、2 回とも裏が出ることを TT などと表すことにする。

a) 1 枚の硬貨を 2 回投げる試行の標本空間 Ω を上の記号を用いて表せ。

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

b) この試行の事象をすべて外延的記法（要素を列挙する方法）で表せ。

$$\phi, \{HH\}, \{HT\}, \{TH\}, \{TT\}, \{HH, HT\}, \{HH, TH\}, \{HH, TT\}, \{HT, TH\}, \{HT, TT\}, \{TH, TT\}, \\ \{HH, HT, TH\}, \{HH, HT, TT\}, \{HH, TH, TT\}, \{HT, TH, TT\}, \{HH, HT, TH, TT\}$$

c) 「少なくとも 1 回表が出る」という事象 A を外延的記法で表せ。

$$A = \{HH, HT, TH\}$$

d) 事象 $B = \{HH, TT\}$ を内包的に言葉で表すとどのようになるか。

例えば「2 回とも同じ面が出る」など。

ある試行において、各事象にはその**確率**が割り当てられていると考える。標本空間 Ω が有限集合である場合、 Ω に属するどの結果も「同程度に確からしく起こる」と考えられるモデルを設定するのが最も一般的であり、そのような場合には確率は以下のように決められる。

定義 1. 有限な標本空間 Ω において、どの結果も**同程度に確からしく起こるもの**とする。このとき、標本空間 Ω のある事象 A に対して、その確率をつぎのように定義する。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

定理 1. 上で定義された確率 P は次の性質をみたす。

- (1) 任意の事象 A に対して、 $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) $P(\Omega) = 1$
- (3) 事象 A と B が排反事象であるとき、すなわち $A \cap B = \phi$ であるとき、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2 1 枚の硬貨を 3 回投げる試行において、前問と同様に、例えば、1 回目に表、2 回目と 3 回目に裏が出るという結果を HTT などと表すことにする。

a) 標本空間 Ω をこの記号を用いて表せ。

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

b) この試行において、事象は全部でいくつあるか。

$$\begin{aligned} \text{事象の個数} &= \Omega \text{ の部分集合の個数} \\ &= 2^{n(\Omega)} = 2^8 = 256 \text{ 個} \end{aligned}$$

c) 「少なくとも 2 回裏が出る」という事象 A を外延的記法を用いて表せ。

$$A = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

d) この試行において、どの結果も同程度に確からしく起こるとするとき、「少なくとも 2 回裏が出る」という事象の確率を求めよ。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

□3 1 から 4 の数字が書かれた 4 枚のカードがある。いま、まず 1 枚のカードを引き、それを元に戻さずにもう 1 枚カードを引くという試行を考える。その結果を、例えば 1 枚目のカードの数字が 3 で、2 枚目の数字が 1 ならば (3, 1) のように表すことにする。

a) この試行の標本空間 Ω を表せ。

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

b) 「引いたカードの数字はともに 3 以上である」という事象を A とする。 A を外延的記法によって表せ。

$$A = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

c) この試行において、どの結果も同程度に確からしく起こるとするとき、事象 A の起こる確率を求めよ。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

□4 前問と同様に、1 から 4 の数字が書かれた 4 枚のカードがある。こんどは、まず 2 枚のカードを同時に引くという試行を考える。その結果を、2 枚のカードにある数字を小さい順に並べて表すことにする。例えば 2 枚目のカードの数字が 1 と 3 ならば (1, 3) のように表す。

a) この試行の標本空間 Ω' を表せ。

$$\Omega' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

b) 「引いたカードの数字はともに 3 以上である」という事象を A' とする。 A' を外延的記法によって表せ。

$$A' = \{(3, 4)\}$$

c) この試行において、どの結果も同程度に確からしく起こるとするとき、事象 A' の起こる確率を求めよ。

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(\Omega')} = \frac{1}{6}$$