まず，次のキーワードについて復習せよ．

- 集合，部分集合，全体集合，補集合，共通部分，和集合
- 試行，標本空間，事象，確率，和事象，積事象，余事象，条件付き確率，事象の独立
- 確率変数，確率分布，平均，期待値，分散，標準偏差，独立な確率変数
- 二項分布，二項分布の期待値，分散，標準偏差

1 1 から 100 までの整数のうち，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B，5 の倍数全体の集合を C とするとき，次の集合の要素の個数を求めよ．

a) $A \cap \overline{B}$　　b) $(A \cup B) \cap C$

2 数直線上の集合 $A = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 5\}$，$B = \{x \mid |x-1| \leqq a\}$ について次の問に答えよ．ただし，a は正の定数とする．

a) $A \cap B = \phi$ となるような a の範囲を求めよ．

b) $A \cap B$ が整数を 1 つだけ含むような a の範囲を求めよ．

c) $\overline{A} \supset \overline{B}$ となるような a の範囲を求めよ．

3 さいころを 2 回続けて投げるという試行において，最初に出た目の数が a で，２回目に出た目の数が b であるという結果を記号 (a, b) で表すことにする．

a) この試行の標本空間 Ω の要素の個数はいくつであるか．

b) この試行において，事象は全部でいくつあるか．

c) この試行において，「出た目の積が 20 以上である」という事象を A とする．A を外延的記法（要素をすべて並べて表す表し方）によって表せ．

d) この試行において，「出た目の数の少なくとも一方は奇数である」という事象を B とする．B の要素の個数はいくつであるか．

e) この試行において，すべての結果のが起こる確率は等しいと仮定するとき，条件付き確率 $P_A(B)$ を求めよ．また，事象 A と事象 B は独立であるかどうかを判定せよ．

4 新型コロナウィルス感染症「第 7 波」の最中，感染者が最も多かった 2022 年 8 月中旬での東京の潜在的な感染率は約 1% と推計されていた．PCR 検査の感度（新型コロナウイルス感染症に感染している人のうち、PCR 検査が陽性となる割合) は 70% で，特異度（感染していない人が PCR 検査で陰性となる割合）は 99.9% とする．新型コロナウィルス感染症に感染しているという事象を C，PCR 検査で陽性判定が出たという事象を Y として，以下の問いに答えよ．

a) 問題文から直接 $P(C)$，$P_C(Y)$，$P_{\overline{C}}(\overline{Y})$ を求めよ．

b) $P(C \cap Y)$，$P(\overline{C} \cap \overline{Y})$ を求めよ．

c) 新型コロナウィルス感染症の感染者と PCR 検査で陽性判定を受けた人の割合を示す一覧表を完成させよ．

検査＼ウィルス	感染 (C)	非感染 $(\overline{C})$	計
陽性 (Y)	%	%	%
陰性 $(\overline{Y})$	%	%	%
計	1 %	%	100 %

d) このような状況の中での PCR 検査の陽性的中率（陽性判定が出た人の中で本当に感染している人の割合）を求めよ．

5 事象 A, B について $P(A) = \dfrac{1}{5}$，$P(B) = b$，$P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$ が成り立つとする．ただし，b は $0 \leqq b \leqq 1$ をみたす数である．

a) $P(A \cap B)$ を求めよ．

b) 事象 A と B が独立になるような b の値を求めよ．

6 2 個のさいころを同時に投げる．2 個のさいころの目のどちらかが偶数であることがわかっているとき，両方の目が偶数である確率を求めよ．

7 ジョーカーを含まない 1 組 52 枚のトランプから 1 枚引くとき，次の 3 つの事象のうち，どの 2 つが独立であるかを判定せよ．また，ジョーカー 1 枚を含む 1 組 53 枚のトランプの場合はどうか．

A: そのカードがハートである

B: そのカードが絵札である

C: そのカードがハートのキングまたはダイヤのキングである

8 5 回に 1 回の割合で帽子を忘れる癖のある K 君が，正月に A，B，C の 3 軒を順に年始回りをして家に帰ったとき，帽子を忘れた来たことに気がついた．

a) 帽子をどこかの家に忘れてくる確率を求めよ．

b) 帽子を B で忘れてくる確率を求めよ．

c) 家に帰ったときに帽子を忘れて来たことに気がついたとき，2 軒目の家 B に忘れてきた確率を求めよ．

d) 家に帰ったときに帽子を忘れて来たことに気がついたとき，どの家に帽子を忘れてきた確率が一番高いか．

9 次の確率変数 X の確率分布を求め，その期待値と分散を求めよ．

a) 4 枚の硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数 X

b) 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の差の絶対値 X

c) 赤玉 4 個と白玉 3 個が入っている袋の中から，1 個ずつ 3 回続けて玉を取り出すとき，赤玉の出た回数 X（ただし，取り出した玉は元に戻さないものとする．）

$\boxed{10}$ 50 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和を X とする．X の期待値と標準偏差を求めよ.

$\boxed{11}$ a，b は定数で，$a > 0$ とする．確率変数 X の期待値が 5，分散が 100 であるとき，1 次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が 0，分散が 1 となるように，a，b の値を定めよ.

$\boxed{12}$ 二つの確率変数 X，Y に対して，共分散と呼ばれる値 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ が定義され，$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ が成り立つ．二つの確率変数 X，Y に対して $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ であれば，$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ．［ヒント：$V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X) + E(Y))^2$ であることを用いるとよい.］

$\boxed{13}$ 1 個のさいころと 2 枚の硬貨を投げるとき，さいころの出る目の数に表の出た硬貨の枚数を乗じたものを得点 X とする．X の期待値を求めよ.

$\boxed{14}$ 4 つの選択肢から 1 つだけ正解を選ぶ問題が 8 問出題される試験がある.

a) この試験があまりに難しいと感じたので，でたらめに答えた．正解が 2 問以下になる確率を求めよ.

b) この試験問題の正解数を X とし，この試験の成績 Y は $Y = aX + b$ で与えるとする．ただし，a, b は定数とする．Y の満点は 100 点，すべてをでたらめに答えたときの Y の平均が 0 点になるように a, b を定めよ.

$\boxed{15}$ ある製品を製造する際に不良品が出る確率は 0.05 であるという．製品 1000 個中の不良品の個数を X とする.

a) 確率変数 X は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形に表せ.

b) X の期待値，標準偏差を求めよ.

$\boxed{16}$ 袋の中に 3 個の白玉と 5 個の黒玉が入っている．この袋から 4 個の玉を同時に取り出すとき，その中に含まれる白玉の個数を X とする．また，この袋から玉を 1 個取り出してはもとに戻すことを 4 回繰り返すとき，白玉の出る回数を Y とする.

a) X の確率分布，期待値，分散を求めよ.

b) Y の期待値，分散を求めよ.

$\boxed{17}$ 原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．さいころを投げて，3 の倍数の目が出たら P は $+2$ だけ移動し，そうでなければ -1 だけ移動する．サイコロを 6 回投げ終わったとき，3 の倍数の目が出た回数を X とし，P の座標を Y とする.

a) X は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表し，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ.

b) X と Y の関係を式で表せ.

c) Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)