12. 復習問題 略解

1 a) $A \cap \bar{B} = \{n \mid n \text{ は } 6 \text{ の倍数ではない } 2 \text{ の倍数}\}$ だから, $n(A \cap B) = 50 - 16 = 34$.
 b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ だから, $n((A \cup B) \cap C) = n((A \cap C) \cup (B \cap C))$
 $= n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 16 + 6 - 3 = 19$.

2 $B = \{x \mid 1 - a \leq x \leq 1 + a\}$ であることに注意する.

a) $0 < a < 2$

b) $3 \leq 1 + a < 4$ より, $2 \leq a < 3$

c) $A \subset B$ となるような a の範囲を求めればよい. そのような a の範囲は $5 \leq 1 + a$ より, $a \geq 4$.

3 a) 36 個 ($\Omega = \{(a, b) \mid a, b \text{ は } 1 \text{ から } 6 \text{ までの自然数}\}$) だから, $n(U) = 36$

b) 事象の個数 = Ω の部分集合の個数だから, 2^{36} 個

c) $A = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

d) $\bar{B}$ は「出た目の数がともに偶数である」であり, $n(\bar{B}) = 3 \times 3 = 9$. したがって, $n(B) = n(U) - n(\bar{B}) = 27$.

e) $A \cap B = \{(4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$ より, $n(A \cap B) = 5$. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{8}$. また, $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$, $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ なので, $P(A \cap B) = \frac{5}{36} \neq P(A)P(B) = \frac{6}{36}$ だから, A と B は独立ではない.

4 a) $P(C) = 0.01$, $P_C(Y) = 0.7$, $P_{\bar{C}}(\bar{Y}) = 0.999$.

b) $P(C \cap Y) = P(C) \times P_C(Y) = 0.007$, $P(\bar{C} \cap \bar{Y}) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(\bar{Y}) = 0.98901$

検査 \ ウィルス	感染 (C)	非感染 ($\bar{C}$)	計
陽性 (Y)	0.7 %	0.099 %	0.799 %
陰性 ($\bar{Y}$)	0.3 %	98.901 %	99.201 %
計	1 %	99 %	100 %

b) 求める確率は $P_{\bar{Y}}(C)$. $P_{\bar{Y}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{Y})}{P(\bar{Y})} = \frac{0.3}{0.999} = 0.876$.

5 a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{5} + b - \frac{3}{5} = b - \frac{2}{5}$.

b) A と B が独立であるためには $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことが必要十分. a) の答えを用いると, $2 - b = \frac{1}{5} \times b$ が必要十分条件. これを解いて, $b = \frac{1}{2}$.

6 A : 「どちらかが偶数」, B : 「両方の目が偶数」とすると, 求める確率は $P_A(B)$. $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$ だから, $P_A(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

7 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{13}$, $P(C) = \frac{1}{26}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{52} = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = \frac{1}{52} \neq P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = \frac{1}{26} \neq P(B)P(C)$. したがって, A と B は独立, A と C , B と C は独立ではない.

ジョーカーを 1 枚含む場合, $P(A) = \frac{13}{53}$, $P(B) = \frac{12}{53}$, $P(C) = \frac{2}{53}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{53} \neq P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = \frac{1}{53} \neq P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = \frac{2}{53} \neq P(B)P(C)$ なので, どの 2 つも独立ではない.

8) a) 帽子を忘れずに家に帰ってくる確率は $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$. 求める確率はその余事象の確率なので,
 $1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$. b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$. c) $\frac{4}{\frac{25}{61}} = \frac{20}{61}$. d) 同様にして, A で忘れて帰る確率は $\frac{1}{5} = \frac{25}{125}$,
 $\frac{25}{61}$, C で忘れて帰る確率は $\frac{16}{\frac{61}{125}} = \frac{25}{61}$. したがって, A の家に忘れて帰る確率が一番高い.

9) a) $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ だから, $E(X) = 2$, $V(X) = 1$.

b) $E(X) = \frac{35}{18} \approx 1.94$, $V(X) = \frac{655}{324} \approx 2.05$

c)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

 より $E(X) = \frac{12}{7}$, $V(X) = \frac{24}{49}$.

10) 表の出た硬貨の金額の和を X とする. 確率分布は

X	0	50	100	150	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

 だから,
 $E(X) = 75$ (円), $\sigma(X) = 25\sqrt{5} \approx 55.9$ (円)

11) $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2V(X)$ が成り立つので, $\begin{cases} 0 = 5a + b \\ 1 = 100a^2 \end{cases}$ を解いて, $a = \frac{1}{10}$, $b = -\frac{1}{2}$.

12) $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2)$
 $= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)$
 $= (E(X^2) - E(X)^2) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) + (E(Y^2) - E(Y)^2) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$

13) さいころの出る目の数を Y , 表の出た硬貨の枚数を Z とすると, $X = YZ$. Y と Z は明らかに独立であるから, $E(X) = E(YZ) = E(Y)E(Z)$. そして, $E(Y) = \frac{7}{2}$, $E(Z) = 1$ だから $E(X) = \frac{7}{2}$.

14) a) ${}_8C_0\left(\frac{3}{4}\right)^8 + {}_8C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^7 + {}_8C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^8 + 8 \cdot 3^7 + 28 \cdot 3^6}{4^8} = \frac{3^6 \cdot 61}{4^8} = \frac{44469}{65536} \approx 0.679$.

b) であらうに答えたときの X の期待値 $E(X)$ は $E(X) = np = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$. $(X, Y) = (2, 0), (8, 100)$ を通る直線の式を求めると, $Y = \frac{100}{6}(X - 2) \approx 16.7X - 33.3$

15) a) $X \sim B(1000, 0.05)$

b) $E(X) = 1000 \times 0.05 = 50$, $V(X) = 1000 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 47.5$.

16) a) X の確率分布は

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

 $E(X) = \frac{3}{2}$, $V(X) = \frac{15}{28}$.

b) $Y \sim B(4, \frac{3}{8})$ だから, $E(Y) = \frac{3}{2}$, $V(Y) = 4 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$.

17) a) $X \sim B(6, \frac{1}{3})$, $E(X) = 2$, $V(X) = \frac{4}{3}$, $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) 3 の倍数の目が出なかった回数は $6 - X$ だから, $Y = (+2)X + (-1)(6 - X) = 3X - 6$

c) $E(Y) = E(3X - 6) = 3E(X) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$, $V(Y) = V(3X - 6) = 3^2V(X) = 12$, $\sigma(X) = 2\sqrt{3}$.