入学年度		学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
		B		1							氏名	

1 最初に数直線上の原点に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に 1 だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に 1 だけ動かす．硬貨を 6 回投げた後の針の座標を X とする．また，硬貨を 6 回投げたとき，表が出る回数を Y とする．次の問に答えよ．

a) Y は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表せ．

$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$

b) X を Y を用いて表せ．

$X = (\text{表の出た回数}) \times (+1) + (\text{裏の出た回数}) \times (-1)$
$= Y \times 1 + (6 - Y) \times (-1)$
$= 2Y - 6$

c) X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ より，$E(Y) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$，$V(Y) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
したがって，
$E(X) = E(2Y - 6) = 2E(Y) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$
$V(X) = E(2Y - 6) = 2^2 V(Y) = 6$
$\sigma(X) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{6}$

2 2 個のサイコロを同時に投げるとき，同じ目が出るならば 20 点を得，異なる目が出るならば 2 点を失うという．これを 15 回繰り返したとき，得点の合計の期待値と標準偏差を求めよ．

2 個のサイコロを同時に投げる思考を 15 回繰り返したときに同じ目が出る回数を X とする．
このとき，X は二項分布 $B\left(15, \frac{1}{2}\right)$ にしたがう．
得点を Y とすると，X と Y の間には
$Y = 20 \times \underbrace{X}_{\text{同じ目}} + (-2) \times \underbrace{(15 - X)}_{\text{違う目}} = 22X - 30.$

$E(X) = 15 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$，$V(V) = 15 \times \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{12}$.
したがって，
$E(Y) = E(22X - 30) = 22E(X) - 30 = 22\frac{5}{2} - 30 = 25$
$V(Y) = V(22X - 30) = 22^2 V(Y) = 22^2 \times \frac{25}{12} = \frac{3025}{3}$
$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{55\sqrt{3}}{3}$

3 あるバスの路線では，バスの乗車を予約した人が実際に利用する確率は 95% であるという．座席数 48 に対して 50 人が乗車券を予約したとすると，座席が不足する確率はいくらか．ただし，$0.95^{49} = 0.081$ として計算せよ．

実際にバスを利用する人数を X とすると，$X \sim B(50, 0.95)$
求める確率は $P(X > 48)$.
$P(X > 48) = P(X = 50) + P(X = 49)$
$= {}_{50}C_{50}\, 0.95^{50} + {}_{50}C_{49}\, 0.95^{49}(1 - 0.95)^{50-49}$
$= 0.95^{50} + 50 \times 0.95^{49} \times 0.05$
$= 0.95^{49}(0.95 + 2.5) = 0.081 \times 2.45 = 0.27945$
$\fallingdotseq 0.28\ (= 28\%)$

4 ある会社で発売しているパンジーの種子の発芽率は，温度 18°C のとき 60% であるという．この会社で発売したパンジーの種子 100 個を，温度 18°C に下温室にまくとき，芽を出すパンジーの本数 X の期待値と標準偏差を求めよ．

$X \sim B(100, 0.6)$ より，
$E(X) = 100 \times 0.6 = 60$
$V(X) = 100 \times 0.6 \times (1 - 0.6) = 24$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

5 1 枚で 10 点を表すコインを 9 枚同時に投げるとき，次の問に答えよ．

a) 表が出る枚数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$X \sim B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ より，
$E(X) = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
$V(X) = 9 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

b) a) で表が出たコインをすべてもらえるとする．このときの得点 Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ．ただし，手数料として 20 点は差し引かれるものとする．

$Y = 10X - 20$ だから，
$E(Y) = E(10X - 20) = 10E(X) - 20 = 10 \times \frac{9}{2} - 20 = 25$
$V(Y) = V(10X - 20) = 10^2 V(X) = 10^2 \times \frac{9}{4} = 225$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{225} = 15$

$\boxed{6}$ さいころが 1 個，硬貨が 1 枚ある．持ち点 0 からはじめて，さいころを投げるときは，出る目の数を持ち点に加え，硬貨を投げるときは，表ならば持ち点を 2 倍にし，裏ならそのままとする．さいころ，硬貨，さいころの順に計 3 回投げるとき，持ち点 Z の期待値を求めたい．

a) 最初と最後に投げたさいころの出た目の数を，それぞれ X_1，X_2 とする．また，確率変数 Y を，硬貨を投げたときに表が出たなら 2，裏が出たなら 1 という値をとる確率変数とする．X_1，Y，X_2 の期待値を求めよ．

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$
$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

b) 持ち点を Z を X_1，Y，X_2 で表せ．

$$Z = YX_1 + X_2$$

c) Z の期待値を求めよ．

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(YX_1 + X_2) \\ &= E(YX_1) + E(X_2) \\ &= E(Y)E(X_1) + E(X_2) \qquad (X_1 \text{ と } Y \text{ は独立だから．}) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \\ &= \frac{35}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ 【発展問題】2018 年の FIFA サッカー W 杯で行われた全 64 試合について，各チームが 1 試合中に挙げた得点についてのデータを表にしてみると下のようになった．

得点	0	1	2	3	4	5	6	7	計
試合数	33	45	35	10	2	2	1	0	128

a) チームが 1 試合に挙げた得点を確率変数 X とみなしたとき，確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	6	7	計
P	0.258	0.352	0.273	0.078	0.016	0.016	0.008	0.000	1

b) 1 チームが 1 試合に挙げた平均得点 μ を求めよ．

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{128}(0 \times 33 + 1 \times 45 + 2 \times 35 + 3 \times 10 + 4 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 1) \\ &= \frac{169}{128} \fallingdotseq 1.32 \end{aligned}$$

c) μ を b) でもとめた平均得点とする．Y を二項分布 $B\left(90, \dfrac{\mu}{90}\right)$ に従う確率変数とするとき，Y の確率分布を求めよ．

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	計
P	0.264	0.354	0.234	0.103	0.033	0.009	0.002	0.000	0.999

$P(Y = k) = {}_{90}\mathrm{C}_k \left(\frac{\mu}{90}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{90}\right)^{90-k}$ であるが，これをスマートフォンや Excel などを用いて計算してみよ．

a) の分布が c) の分布で良く近似できていることに注目．90 分間の平均得点 1.32 であることを，1 分間に得点の入る確率が $\frac{1.32}{90}$ であると見做し，サッカーの得点の分布は「当選確率が $\frac{1.32}{90}$ であるくじを 90 本引いたときの当たった本数」の分布で近似できることを意味している．興味があれば，以下のサイトなどを参照するとよい．`https://www-ie.meijo-u.ac.jp/%7ekonaka/footballPoissonSimulation.html`