

2 つの確率変数 X, Y について, X が値 a をとり, Y が値 b をとる確率を $P(X = a, Y = b)$ で表す. 確率変数 X と Y は**独立**であるとは, X がとる任意の値 x_i と, Y がとる任意の値 y_j に対して, 次の式が成り立つことをいう.

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

1 2 つの独立な確率変数 X, Y の確率分布が次の表で与えられているとする.

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

すると, $X = x_i, Y = y_j$ のとき, $x_i y_j$ の値をとる確率変数 Z の確率分布は次の表で与えられる.

Z	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	計
P	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	1

このとき, $E(Z) = E(X)E(Y)$ が成り立つことを示せ.

一般に, 独立な確率変数 X と Y について, $E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つことが上と同様に示せる.

2 a) 独立な確率変数 X と Y について, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ.

[分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いるとよい.]

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

b) X_1, X_2, X_3 を互いに独立な確率変数とする. $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$ が成り立つことを証明せよ.

3 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5 , 確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり, X と Y が互いに独立であるとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

4 a) サイコロを 1 回投げるとき, 1 の目が出ると $X = 1$, それ以外の目が出ると $X = 0$ とする. 確率変数 X の期待値と分散を求めよ.

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき, 1 の目が出る回数を Y とする. このとき, 第 k 回目に 1 の目が出ると 1, それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると, 各 X_k は a) と同じ分布にしたがい, $X_1, \dots, X_5$ は互いに独立であって, $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる. これを用いて, 確率変数 Y の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

5 次の二項分布の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

a) $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$

b) $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$

c) $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

7 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき，次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ．

a) $Y = 3X - 2$

b) $Y = -X$

6 次の確率変数 X は二項分布に従う． X を $B(n, p)$ の形に表し， X の期待値，標準偏差を求めよ．

a) 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表が出る回数 X ．

c) $Y = \frac{X - 20}{4}$

b) 不良率 3% の製品の山から 50 個取り出したときの不良品の個数 X ．

8 a, b は定数で， $a > 0$ とする．確率変数 X の期待値が 5，分散が 100 であるとき，1 次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が 0，分散が 1 となるように， a, b の値を定めよ．