入学年度	学部	学科		組		番	号		検	フリガナ
	B		1							氏名

2つの確率変数 X, Y について，X が値 a をとり，Y が値 b をとる確率を $P(X=a, Y=b)$ で表す．確率変数 X と Y は**独立**であるとは，X がとる任意の値 x_i と，Y がとる任意の値 y_j に対して，次の式が成り立つことをいう．

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_i)$$

1 2つの独立な確率変数 X, Y の確率分布が次の表で与えられているとする．

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

すると，$X=x_i, Y=y_j$ のとき，x_iy_i の値をとる確率変数 Z の確率分布は次の表で与えられる．

Z	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2	計
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2	1

このとき，$E(Z)=E(X)E(Y)$ が成り立つことを示せ．

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2, E(Y)=y_1q_1+y_2q_2$ より，

$$\begin{aligned} E(Z) &= (x_1y_1)(p_1q_1)+(x_1y_2)(p_1q_2)+(x_2y_1)(p_2q_1)+(x_2y_2)(p_2q_2) \\ &= (x_1p_1)(y_1q_1)+(x_1p_1)(y_2q_2)+(x_2p_2)(y_1q_1)+(x_2p_2)(y_2q_2) \\ &= (x_1p_1)(y_1q_1+y_2q_2)+(x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2) \\ &= (x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2) = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

一般に，独立な確率変数 X と Y について，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つことが上と同様に示せる．

2 a) 独立な確率変数 X と Y について，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ が成り立つことを証明せよ．

［分散と期待値の関係式 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ を用いるとよい．］

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big)-E(X+Y)^2 \\ &= E(X^2+2XY+Y^2)-\big(E(X)+E(Y)\big)^2 \\ &= E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-\big(E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\big) \\ &= \underbrace{E(X^2)-E(X)^2}_{=V(X)}+2\big(\underbrace{E(XY)-E(X)E(Y)}_{=0\ (X,Y\ \text{独立より})}\big)+\underbrace{E(Y^2)-E(Y)^2}_{=V(Y)} \\ &= V(X)+V(Y) \end{aligned}$$

b) X_1, X_2, X_3 を互いに独立な確率変数とする．$V(X_1+X_2+X_3)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)$ が成り立つことを証明せよ．

$$\begin{aligned} &V(X_1+X_2+X_3) \\ &= E\big((X_1+X_2+X_3)^2\big)-E(X_1+X_2+X_3)^2 \\ &= E\big(X_1^2+X_2^2+X_3^2+2X_1X_2+2X_2X_3+2X_3X_1\big)-\big(E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)\big)^2 \\ &= E(X_1^2)+E(X_2^2)+E(X_3^2)+2E(X_1X_2)+2E(X_2X_3)+2E(X_3X_1) \\ &\quad -\big(E(X_1)^2+E(X_2)^2+E(X_3)^2+2E(X_1)E(X_2)+2E(X_2)E(X_3)+2E(X_3)E(X_1)\big)^2 \\ &= \big(E(X_1^2)-E(X_1)^2\big)+\big(E(X_2^2)-E(X_2)^2\big)+\big(E(X_3^2)-E(X_3)^2\big) \\ &\quad +2\big(E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)\big)+2\big(E(X_2X_3)-E(X_2)E(X_3)\big)+2\big(E(X_3X_1)-E(X_3)E(X_1)\big) \\ &= V(X_1)+V(X_2)+V(X_3) \end{aligned}$$

3 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5，確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり，X と Y が互いに独立であるとする．このとき，確率変数 $Z=X+Y$ の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(X)=-3, V(X)=5,\quad E(Y)=2, V(Y)=4$ より，

$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-3+2=-1$

さらに，X と Y は独立だから，

$V(Z)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)=5+4=9$

$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{9}=3$

4 a) さいころを1回投げるとき，1の目が出ると $X=1$，それ以外の目が出ると $X=0$ とする．確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

$$E(X)=\frac{1}{6}\times 1+\frac{5}{6}\times 0=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-E(X)^2=\left(\frac{1}{6}\times 1^2+\frac{5}{6}\times 0^2\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{5}{36} \end{aligned}$$

X	1	0	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

b) 1個のサイコロを続けて5回投げるとき，1の目の出る回数を Y とする．このとき，第 k 回目に1の目が出ると1，それ以外の目が出ると0となる確率変数を X_k とすると，各 X_k は a) と同じ分布にしたがい，$X_1, \ldots, X_5$ は互いに独立であって，$Y=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ と表せる．これを用いて，確率変数 Y の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$$E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_5)=\frac{1}{6}\times 5=\frac{5}{6}$$

$$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_5)=\frac{5}{36}\times 5=\frac{25}{36}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\frac{5}{6}$$

$\boxed{5}$ 次の二項分布の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

a) $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$

平均：$\mu = 12 \times \frac{1}{4} = 3$

分散：$\sigma^2 = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

b) $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$

平均：$\mu = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

分散：$\sigma^2 = 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

c) $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

平均：$\mu = 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

分散：$\sigma^2 = 8 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

$\boxed{6}$ 次の確率変数 X は二項分布に従う．X を $B(n, p)$ の形に表し，X の期待値，標準偏差を求めよ．

a) 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表が出る回数 X．

$p = \frac{1}{2}$，$n = 10$ なので，$X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

平均：$\mu = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

分散：$\sigma^2 = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

b) 不良率 3% の製品の山から 50 個取り出したときの不良品の個数 X．

$p = 0.03$，$n = 50$ なので，$X \sim B(50, 0.03)$

平均：$\mu = 50 \times 0.03 = 1.5$

分散：$\sigma^2 = 50 \times 0.03 \times 0.97 = 1.455$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{1.455} \fallingdotseq 1.21$

$\boxed{7}$ 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき，次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ．

a) $Y = 3X - 2$

$$\begin{cases} E(X) = 100 \times 0.2 = 20 \\ V(X) = 100 \times 0.2 \times 0.98 = 16 \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} E(Y) = E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 20 - 2 = 58 \\ V(X) = V(3X-2) = 3^2 = 9 \times 16 = 144 \end{cases}$$

b) $Y = -X$

$$\begin{cases} E(Y) = E(-X) = -E(X) = -20 \\ V(X) = V(-X) = (-1)^2 = 16 \end{cases}$$

c) $Y = \dfrac{X - 20}{4}$

$$\begin{cases} E(Y) = E\left(\dfrac{X-20}{4}\right) = \dfrac{E(X) - 20}{4} = 0 \\ V(X) = V\left(\dfrac{X-20}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 V(X) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{8}$ a，b は定数で，$a > 0$ とする．確率変数 X の期待値が 5，分散が 100 であるとき，1 次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が 0，分散が 1 となるように，a，b の値を定めよ．

$E(X) = 5$，$V(X) = 100$ より，

$$\begin{cases} E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b = 5a + b = 0 \\ V(X) = V(aX+b) = a^2 V(X) = 100a^2 = 1 \end{cases}$$

が成り立てばよいから，$\begin{cases} 5a + b = 0 \\ 100a^2 = 1 \end{cases}$ を解いて，$a = \frac{1}{10}$，$b = -\frac{1}{2}$．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)