入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1						氏 名	

以下の問題の目的は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【a が自然数の場合】任意の正の整数 n について関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = x^n$ と定義する．すなわち，$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \cdots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき，

$$f_n{}'(x) = nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

よって，$(*)$ は $n = 1$ のとき確かに成り立つ．

(II) $n = k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．すなわち $f_k{}'(x) = kx^{k-1}$ が成り立つとする．すると，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$\begin{aligned} f_{k+1}{}'(x) = \big(f_1(x)f_k(x)\big)' &= f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x) \\ &= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

したがって，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ は $n = k+1$ のときも成立．

(I)，(II) より，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ はすべての自然数で成り立つ．

［結論まできちんと述べよ．］

$\boxed{2}$ 【a が負の整数の場合】n を自然数として，$(x^{-n})'$ を求めたい．$(x^{-n})' = \left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ と書き直し，商の微分公式を用いて計算し，さらにそれを Ax^B の形に表すことにより，$(x^{-n})'$ を求めよ．

$g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ だから，

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

上の式を指数を用いて表すと，

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

$\boxed{3}$ 【$a = 1/n$ の場合】n を自然数として，$(x^{\frac{1}{n}})'$ を求めたい．関数 $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x) = x^n$ の逆関数である．すなわち $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

$f(x) = x^n$ とすると，$f'(x) = nx^{n-1}$，$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ だから，逆関数の微分公式により，

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n\left(f^{-1}(x)\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

b) 上の結果を分数指数を用いて Ax^B の形に表すことにより，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が $a = \dfrac{1}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ．

$$(x^{\frac{1}{n}}) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$\boxed{4}$ 【a が有理数の場合】m, n を自然数として，$(x^{\frac{m}{n}})'$ を求めたい．$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を計算し，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が $a = \dfrac{m}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ．［ヒント：$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ とすると，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ であり，$f'(x) = mx^{m-1}$，$g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ だから，合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) &= m(g(x))^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $x \neq 1$ で，n が自然数のとき，$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ．この両辺を x について微分することにより，$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ．

$$(\text{左辺})' = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})' &= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の導関数を $f(x)$, $f'(x)$ を用いて表せ．.

a) $\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n\left(f(x)\right)^{n-1} f'(x)$

b) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)' \\ &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 \left(x^2 + 2\right)\end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(3x - 2)^2}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\left((3x - 2)^2\right)'}{\left((3x - 2)^2\right)^4} \\ &= -\frac{2(3x - 2)(3x - 2)'}{(3x - 2)^4} \\ &= -\frac{6}{(3x - 2)^3}\end{aligned}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2} - 1} \cdot (x^2 - 2x)' \\ &= -(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{1 - x}{(\sqrt{x^2 - 2x})^3}\end{aligned}$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((2x^2 + 5)^{\frac{1}{3}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}(2x^2 + 5)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (2x^2 + 5)' \\ &= \frac{1}{3}(2x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x \\ &= \frac{4x}{\left(\sqrt[3]{x^2 - 2x}\right)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば， その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し, もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，次の等式を証明せよ.

$$\left(f(x)g(x)\right)'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$\begin{aligned}\left(f(x)g(x)\right)'' &= \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)' \\ &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)\end{aligned}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)