

6 合成関数の微分公式

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

• 合成関数の微分公式 (連鎖律)

2つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい。いま、

$$\begin{aligned}x \text{ の増分 } \Delta x \text{ に対する } u \text{ の増分を } \Delta u, \\u \text{ の増分 } \Delta u \text{ に対する } y \text{ の増分を } \Delta y\end{aligned}$$

とする。すなわち、

$$\begin{aligned}\Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x), \\ \Delta y &= f(u + \Delta u) - f(u)\end{aligned}$$

と定義する。ここで、求めたいのは $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \rightarrow 0$ としたときの極限である。 Δx を変化させたとき、 Δu , Δy は段階的に変化するので、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ に Δu を挟み、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (*)$$

と書く。この両辺の $\Delta x \rightarrow 0$ とした極限を考える。ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となるので、

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta u}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\end{aligned}$$

が成り立つ。これより、合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

合成関数の微分公式を、'を用いた記法で表すことを考えよう。合成関数 $f(g(x))$ の導関数 $(f(g(x)))'$ は

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

で定義される。ここで、 $u = g(x)$ としたとき、 $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ であったから、

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける。したがって、 $g(x + \Delta x)$, $g(x)$ をそれぞれ、 $u + \Delta u$, u で置き換えて

$$f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = \boxed{}$$

と書くことができる。そして、(*)と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \boxed{}\end{aligned}$$

となる。この両辺において $\Delta x \rightarrow 0$ すると、 $\Delta u \rightarrow 0$ だから、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで、

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \boxed{}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{}$$

だから、

$$(f(g(x)))' = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = f'(g(x))$ と書き直せるので、次の合成関数の微分公式が得られる。

$$(f(g(x)))' = \boxed{}$$

• 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい。関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ とは、 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない。そこで、

$$f(g(x)) = x$$

の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると、

$$\text{左辺} = \boxed{}, \quad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから、

$$\boxed{} = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと、

$$g'(x) = \frac{1}{\boxed{}}$$

ここで、 $g(x) = f^{-1}(x)$, $g'(x) = (f^{-1}(x))'$ として、逆関数の導関数の公式が得られる。

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\boxed{}}$$

1 $\left(f(g(h(x))) \right)'$ を求めよ.

2 $(g(x)^2)'$ を求めよ.

3 $f(x) = x^2$ としたとき, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である. 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt{x})'$ を求めよ.

4 前問と同様にして $(\sqrt[3]{x})'$ を求めよ.

5 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1 - 2x^2)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{(4x + 3)^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x} \right)^3$

$f'(x) =$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) =$