入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1						氏 名	

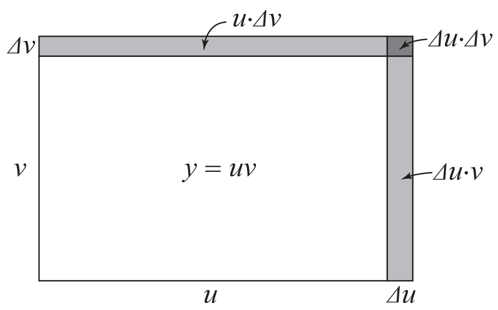
● 積の微分公式

2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表す．

いま，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．

x が $x + \Delta x$ に変化したとき，u，v はそれぞれ

$$u \longrightarrow u + \Delta u, \quad v \longrightarrow v + \Delta v$$



と変化するので，y は

$$y = uv \longrightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する．したがって，y の増分 Δy は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

と表せる．この右辺を展開して整理すると，

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} \cdot \Delta v + \boxed{\quad\quad\quad}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\quad\quad} \cdot v + u \cdot \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad\quad}$$

ここで $\Delta x \to 0$ としたときの極限 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．まず，最初の 2 項は導関数の定義より，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

と書ける．そして最後の項は，v が微分可能であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ．したがって，次の積の微分公式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\quad\quad} \cdot \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} \cdot \boxed{\quad\quad}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \big(f(x)g(x)\big)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の積の微分公式が得られる．

$$\big(f(x)g(x)\big)' =$$

● 商の微分公式

次に，2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の商として表される関数 $y = \dfrac{u}{v}$ の導関数を求めたい．前と同様に，x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表し，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．

前の場合と同様に，x が $x + \Delta x$ に変化したとき，$u \longrightarrow u + \Delta u$，$v \longrightarrow v + \Delta v$ と変化するので，

$$y = \frac{u}{v} \longrightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する．したがって，y の増分 Δy は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

となる．これを通分し，整理すると，

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．ここで $\Delta x \to 0$ としたときの極限 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．積の公式の場合と同様

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり，また，v が微分可能であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)v = v^2$ が成り立つ．したがって，次の商の微分公式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\quad\quad} \cdot \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} \cdot \boxed{\quad\quad}}{v^2}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の商の微分公式が得られる．

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

1 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x - 2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 5}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

2 a) $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの微分可能な関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ.

b) 2 つの微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について導関数 $\big(f(x)^2 g(x)\big)'$ を求めよ.

c) 底面の半径が r で，高さが h の直円錐がある．r，h が時間 t とともに変化するとき，この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\dfrac{dV}{dt}$ を $r, h, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{dh}{dt}$ を用いて表せ．［ヒント：b) の結果を用いるとよい.］

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)