

4 ♡ 逆関数とそのグラフ

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

① $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ とする.

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域を求めよ.

分母 $\neq 0$ より、定義域は $x \neq -2$. (正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -2\}$)

b) y を定数とし $f(x) = y$ を x の方程式とみなす. この方程式が解を持つための y の条件を求めよ.

また、その条件がみたされたときの解 x を求めよ.

方程式 $y = \frac{3x+2}{x+2}$ の両辺に $x+2$ をかけて、

$$(x+2)y = 3x+2 \Leftrightarrow xy+2y = 3x+2 \Leftrightarrow (y-3)x = -2y+2$$

この最後の方程式は x の係数 $y-3$ が 0 ではないとき、すなわち $y \neq 3$ のときにのみ解を持ち、その時の

解は $x = \frac{-2(y-1)}{y-3}$

c) 関数 $y = f(x)$ の値域を求めよ.

$y = f(x)$ が解を持つのは $y \neq 3$ のときなので、値域は $y \neq 3$. (正確には $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$)

d) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ

$y = f(x)$ を $y \neq 3$ のときに解くと、 $x = \frac{-2(y-1)}{y-3}$ なので、 $f^{-1}(y) = \frac{-2(y-1)}{y-3}$. ここで、慣習に従って
 y を x と書き換えて、 $f^{-1}(x) = \frac{-2(x-1)}{x-3}$

e) $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域をそれぞれ求めよ.

$y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域はそれぞれ、 $y = f(x)$ の値域と定義域なので、

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は、 $x \neq 3$ 、値域は $y \neq -2$.

② $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ とする.

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ.

根号内が ≥ 0 になること、分母が 0 にならないことより、定義域は $x > 0$.

\sqrt{x} の値域はすべての負でない実数なので、 $f(x)$ の値域は $y < 0$.

b) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域をそれぞれ求めよ.

$y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ を x について解くと、 $x = \frac{1}{y^2}$. ここで、 x と y を入れ換えて $y = \frac{1}{x^2}$.

すなわち、 $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$.

$f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域なので、 $x < 0$.

値域は $f(x)$ の定義域なので $y > 0$.

③ $f(x) = \sqrt{-2x+7}$ とする.

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ.

定義域は根号内 ≥ 0 より、 $x \leq \frac{7}{2}$.

値域は $y \geq 0$.

b) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域をそれぞれ求めよ.

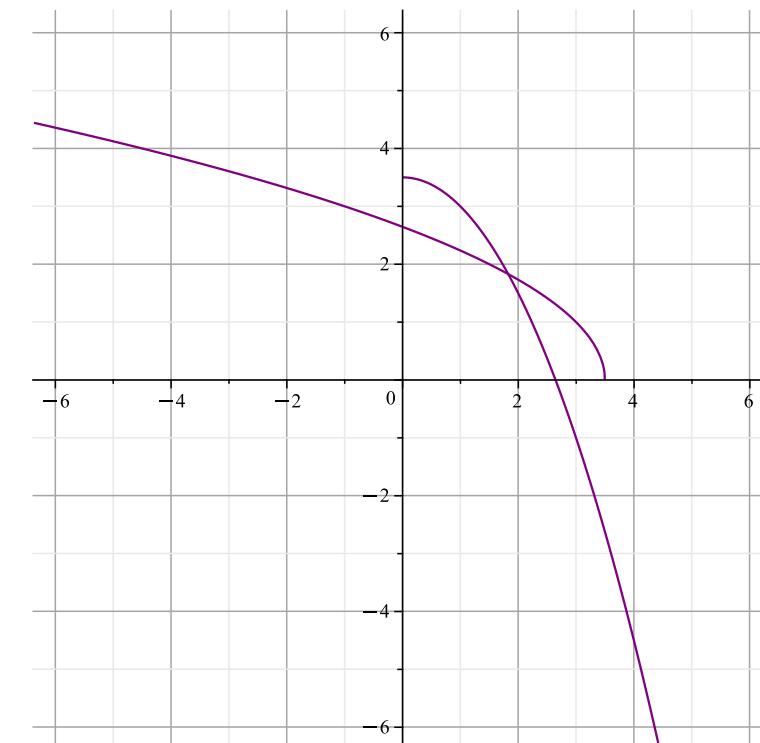
$y = \sqrt{-2x+7}$ の両辺を 2乗すると、 $y^2 = -2x+7$. これを x について解くと、

$$x = -\frac{1}{2}y^2 = \frac{7}{2}. \text{ ここで、 } x \text{ と } y \text{ を入れ換えて、 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}.$$

すなわち、 $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$.

$f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域なので $x \geq 0$. 値域は $f(x)$ の定義域なので $y \leq \frac{7}{2}$.

c) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け.



4) $f(x) = x^3 - 2$ とする.

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ.

定義域は、実数全体 (\mathbb{R}),

値域も実数全体 (\mathbb{R}).

b) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域をそれぞれ求めよ.

$y = x^3 - 2$ を x について解くと、 $x = \sqrt[3]{y+2}$. ここで、 x と y を入れ換えて、 $y = \sqrt[3]{x+2}$. すなわち、 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

$f^{-1}(x)$ の定義域、値域ともに実数全体.

5) $f(x) = \log_2(x+2)$ とする.

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ.

定義域は真数条件 $x+2 > 0$ より、 $x > -2$.

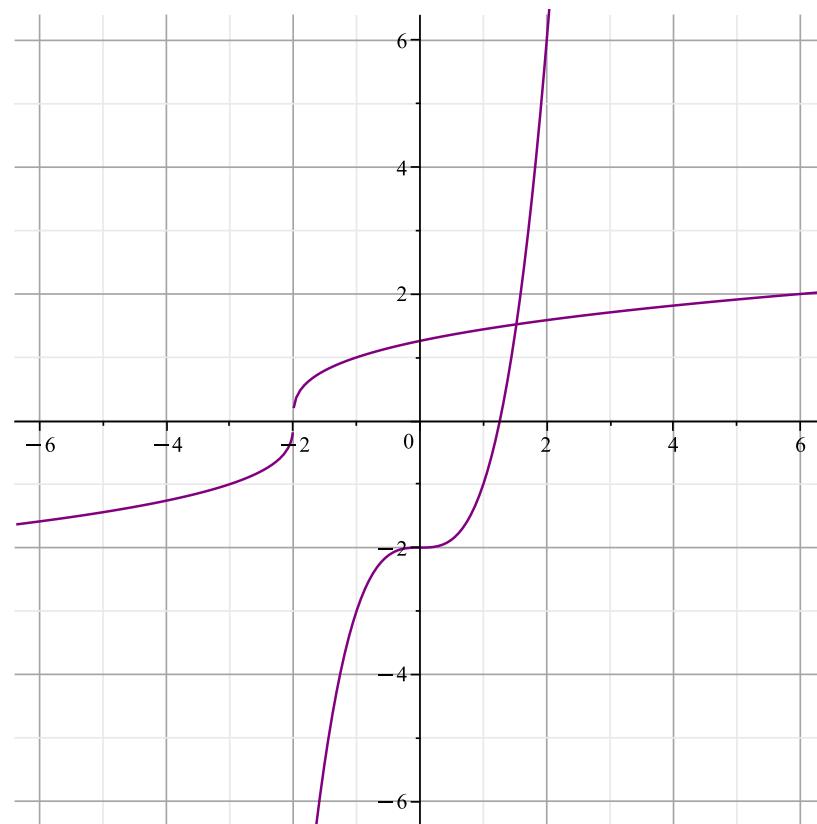
値域は $y = \log_2 x$ の値域が実数全体であることから、実数全体.

b) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域をそれぞれ求めよ.

$y = \log_2(x+2)$ を x について解く。 $2^y = x+2$ より、 $x = 2^y - 2$. ここで、 x と y を入れ換えて、 $y = 2^x - 2$. すなわち、 $f^{-1}(x) = 2^x - 2$.

$f^{-1}(x)$ の定義域は、 $f(x)$ の値域である実数全体。 $f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域より、 $y > -2$.

c) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け.



c) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け.

