

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 次の二つの関数 $f(x), g(x)$ を合成し, $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ.

a) $f(x) = 4x^2, g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) + 1) = -\frac{1}{2}(4x^2 + 1) = -2x^2 - \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4g(x)^2 = \left(-\frac{1}{2}(f(x) + 1)\right)^2 - 1 = (x+1)^2$$

b) $f(x) = x-1, g(x) = \frac{2}{x} + 3$

$$(g \circ f)(x) = g(x-1) = \frac{2}{x-1} + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2}{x} + 3\right) = \frac{2}{x} + 2$$

c) $f(x) = \frac{2}{x+1}, g(x) = \frac{x+3}{x-1}$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right) + 3}{\left(\frac{2}{x+1}\right) - 1} = \frac{3x+5}{-x+1}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{2}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 1} = \frac{2(x-1)}{2x+2} = \frac{x-1}{x+1}$$

d) $f(x) = 2^{-x}, g(x) = \log_2 x$

$$(g \circ f)(x) = g(2^{-x}) = \log_2 2^{-x} = -x$$

$$(f \circ g)(x) = f(\log_2 x) = 2^{-\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^{-1} = x^{-1}$$

2 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x-1}, h(x) = 1-x$ とする

a) 合成関数 $(f \circ g)(x)$ と $(g \circ h)(x)$ を求めよ.

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{x-(x-1)}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(g \circ h)(x) = g(1-x) = \frac{1-x}{(1-x)-1} = \frac{x-1}{x}$$

b) $((f \circ g) \circ h)(x)$ と $(f \circ (g \circ h))(x)$ を求め, 両者が一致することを示せ.

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(1-x) = \frac{1}{1-x}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

したがって, 確かに $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$ が成り立つ.

3 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ とする.

a) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ.

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \text{ を } x \text{ について解く.}$$

$$\text{両辺に } x-3 \text{ をかけ, } (x-3)y = 2x+1. \text{ これより, } (y-2)x = 3y+1.$$

$$\text{したがって, } y \neq 2 \text{ のとき解を持ち, } x = \frac{3y+1}{y-2}.$$

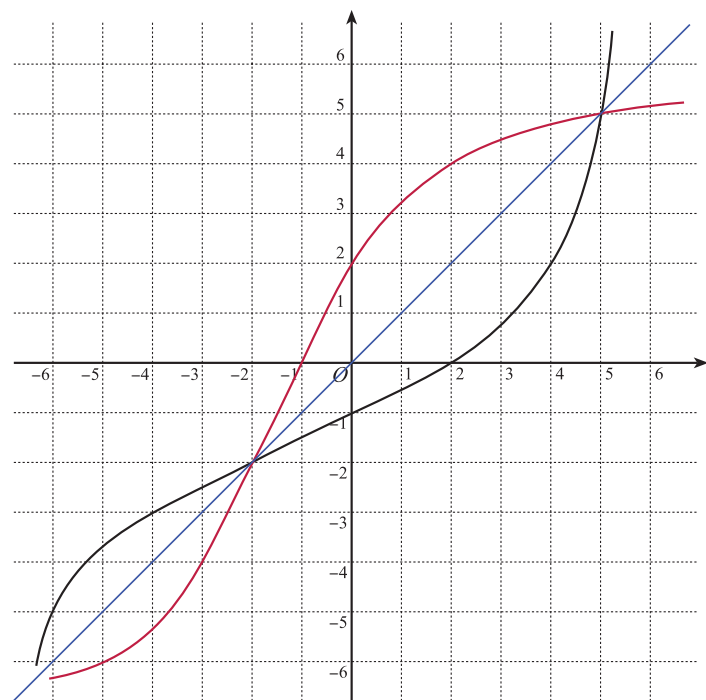
$$\text{ここで, } x \text{ と } y \text{ を入れ換えて } y = \frac{3x+1}{x-2}. \text{ すなわち } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}.$$

b) $(f^{-1} \circ f)(x)$ と $(f \circ f^{-1})(x)$ をそれぞれ計算せよ.

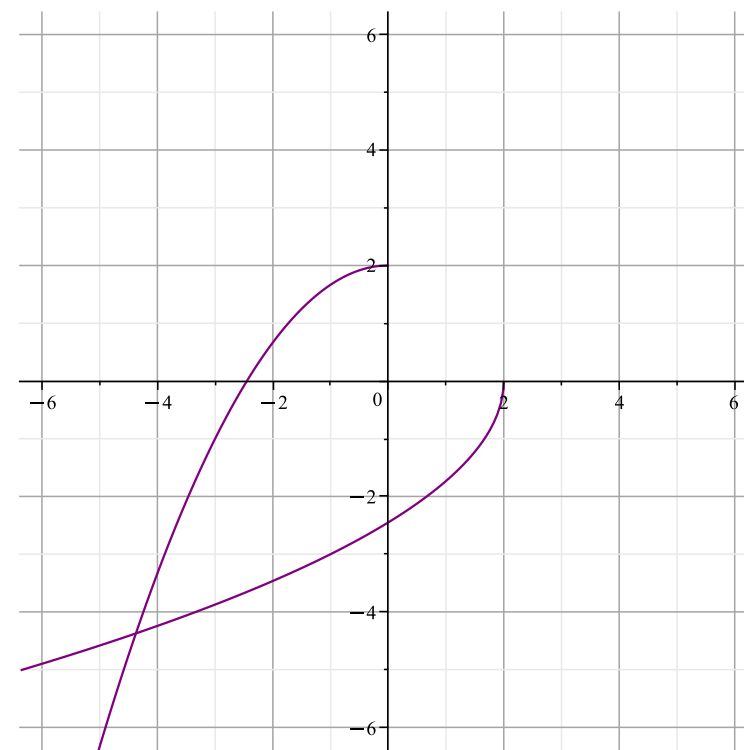
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = \frac{3\frac{2x+1}{x-3} + 1}{\frac{2x+1}{x-3} - 2} = \frac{3(2x+1) + (x-3)}{(2x+1) - 2(x-3)} = \frac{7x}{7} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = \frac{2\frac{3x+1}{x-2} + 1}{\frac{3x+1}{x-2} - 3} = \frac{2(3x+1) + (x-2)}{(3x+1) - 3(x-2)} = \frac{7x}{7} = x$$

4 下の図のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフである。その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関し **線対称** 移動したものである。 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを下の図に書き込め。



d) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け。



5 $f(x) = -\sqrt{-3x + 6}$ とする。

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を示せ。

根号内 ≥ 0 より、 $-3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ 。

$y = -\sqrt{x}$ の値域は $y \leq 0$ なので、 $y = -\sqrt{-3x + 6}$ の値域も $y \leq 0$ 。

b) 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。

$y = -\sqrt{-3x + 6}$ の両辺を 2 乗して、 $y^2 = -3x + 6$ 。これを x について解くと、 $x = -\frac{1}{3}y^2 + 2$ 。

ここで、 x と y を入れ換えて、 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 。すなわち、 $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 。(ただし、定義域は $x \leq 0$ に制限される。)

c) $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を示せ。

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は、 $y = f(x)$ の値域より、 $x \leq 0$ 。

$y = f^{-1}(x)$ の値域は、 $y = f(x)$ の定義域より、 $y \leq 2$ 。