

### 3 合成関数・逆関数

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

[1] 次の二つの関数  $f(x), g(x)$  を合成し、 $(g \circ f)(x) \cup (f \circ g)(x)$  を求めよ。

a)  $f(x) = 4x^2, g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x)+1) = -\frac{1}{2}(4x^2+1) = -2x^2 - \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4g(x)^2 = \left(-\frac{1}{2}(f(x)+1)\right)^2 - 1 = (x+1)^2$$

[2]  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x-1}, h(x) = 1-x$  とする

a) 合成関数  $(f \circ g)(x) \cup (g \circ h)(x)$  を求めよ。

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{x-(x-1)}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(g \circ h)(x) = g(1-x) = \frac{1-x}{(1-x)-1} = \frac{x-1}{x}$$

b)  $f(x) = x-1, g(x) = \frac{2}{x} + 3$

$$(g \circ f)(x) = g(x-1) = \frac{2}{x-1} + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2}{x} + 3\right) = \frac{2}{x} + 2$$

c)  $f(x) = \frac{2}{x+1}, g(x) = \frac{x+3}{x-1}$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right) + 3}{\left(\frac{2}{x+1}\right) - 1} = \frac{3x+5}{-x+1}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{2}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 1} = \frac{2(x-1)}{2x+2} = \frac{x-1}{x+1}$$

d)  $f(x) = 2^{-x}, g(x) = \log_2 x$

$$(g \circ f)(x) = g(2^{-x}) = \log_2 2^{-x} = -x$$

$$(f \circ g)(x) = f(\log_2 x) = 2^{-\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^{-1} = x^{-1}$$

b)  $((f \circ g) \circ h)(x) \cup (f \circ (g \circ h))(x)$  を求め、両者が一致することを示せ。

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(1-x) = \frac{1}{1-x}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

したがって、確かに  $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$  が成り立つ。

[3]  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  とする。

a) 逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \text{ を } x \text{ について解く。}$$

両辺に  $x-3$  をかけ、 $(x-3)y = 2x+1$ . これより、 $(y-2)x = 3y+1$ .

したがって、 $y \neq 2$  のとき解を持ち、 $x = \frac{3y+1}{y-2}$ .

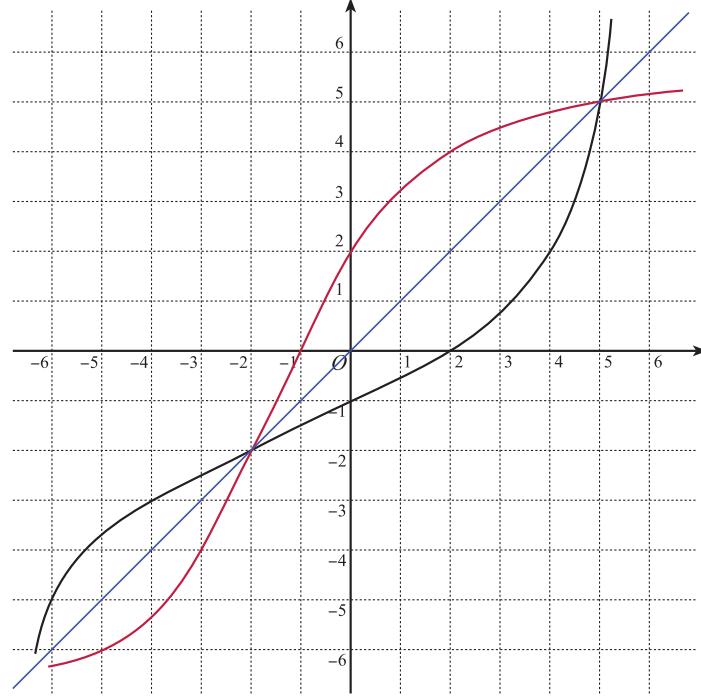
ここで、 $x$  と  $y$  を入れ換えて  $y = \frac{3x+1}{x-2}$ . すなわち  $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ .

b)  $(f^{-1} \circ f)(x) \cup (f \circ f^{-1})(x)$  をそれぞれ計算せよ。

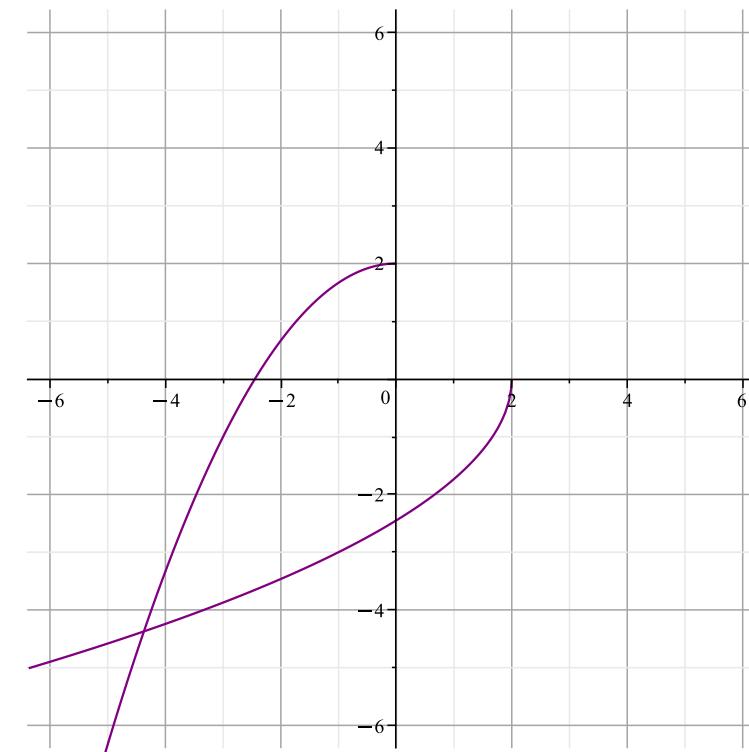
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = \frac{\frac{3(2x+1)+1}{x-3} + 1}{\frac{2x+1}{x-3} - 2} = \frac{3(2x+1)+(x-3)}{(2x+1)-2(x-3)} = \frac{7x}{7} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = \frac{\frac{2(3x+1)+1}{x-2} + 1}{\frac{3x+1}{x-2} - 3} = \frac{2(3x+1)+(x-2)}{(3x+1)-3(x-2)} = \frac{7x}{7} = x$$

- 4 下の図のグラフは、関数  $y = f(x)$  のグラフである。その逆関数  $y = f^{-1}(x)$  のグラフは、 $y = f(x)$  のグラフを直線  $y = x$  に関し 線対称 移動したものである。 $y = f^{-1}(x)$  のグラフを下の図に書き入れ。



- d)  $y = f(x)$  のグラフと逆関数  $y = f^{-1}(x)$  のグラフを描け。



- 5  $f(x) = -\sqrt{-3x + 6}$  とする。

- a) 関数  $y = f(x)$  の定義域と値域を示せ。

根号内  $\geq 0$  より、 $-3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ .

$y = -\sqrt{x}$  の値域は  $y \leq 0$  なので、 $y = -\sqrt{-3x + 6}$  の値域も  $y \leq 0$ .

- b) 逆関数  $y = f^{-1}(x)$  を求めよ。

$y = -\sqrt{-3x + 6}$  の両辺を 2乗して、 $y^2 = -3x + 6$ . これを  $x$  について解くと、 $x = -\frac{1}{3}y^2 + 2$ .

ここで、 $x$  と  $y$  を入れ換えて、 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ . すなわち、 $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ . (ただし、定義域は  $x \leq 0$  に制限される。)

- c)  $y = f^{-1}(x)$  の定義域と値域を示せ。

$y = f^{-1}(x)$  の定義域は、 $y = f(x)$  の値域より、 $x \leq 0$ .

$y = f^{-1}(x)$  の値域は、 $y = f(x)$  の定義域より、 $y \leq 2$ .