2025 年 1 月 10 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{-2x-5}{x+1}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

分母 $\neq 0$ より，$x \neq -1$.（正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$）

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{x+1}$ の形に表せ.

$-2x-5$ を $x+1$ で割ると，商は 3，余りは 2 だから，

$$\frac{-2x-5}{x+1} = -2 + \frac{-3}{x+1}$$

c) x が 2 から $2+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．［ヒント：前間の形に直してから計算するとよい.］

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2+\frac{-3}{(2+h)+1} - \left(-2+\frac{-3}{2+1}\right)}{h}$$
$$= \frac{\frac{-3}{3+h}+1}{h} = \frac{-3+(3+h)}{h(3+h)}$$
$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(3+h)} = \frac{1}{h+3}$$

d) $f(x)$ の $x=2$ における微分係数を極限による定義を用いて直接計算せよ.

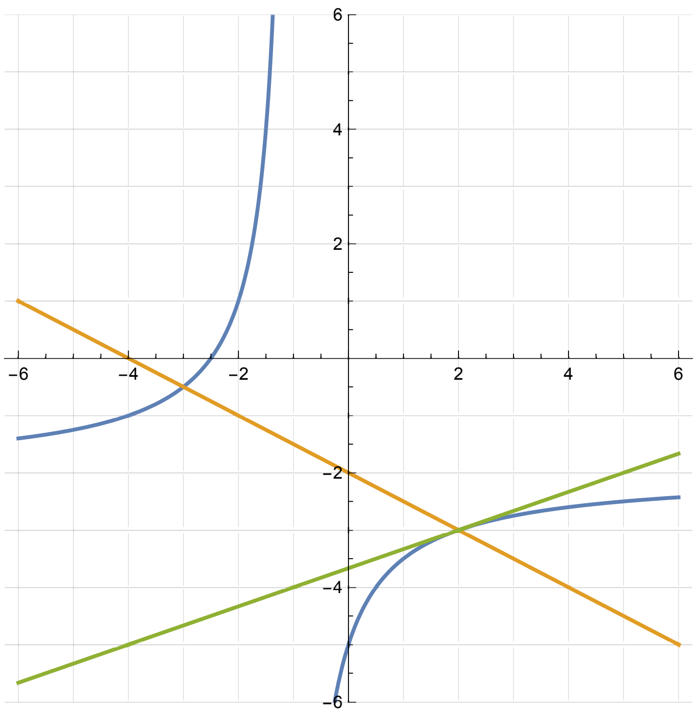
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{3+h} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

e) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ.

$f(2) = -3$，$f'(2) = \frac{1}{3}$ なので，接線は $(2,-3)$ を通り，傾き -2 の直線.

$y-(-3) = \frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$

f) $y = f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$ を下の座標平面内に描け.



g) 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-2x-5}{x+1} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

y を消去して，$\frac{-2x-5}{x+1} = -\frac{1}{2}x-2$．分母を払って，

$-2x-5 = (x+1)(-\frac{1}{2}x-2) \Leftrightarrow -2x-5 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 2$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0=0 \Leftrightarrow x = 2, -34$

$x=2$ のとき $y=-3$，$x=-3$ のとき $y=-\frac{1}{2}$.

(答) $\underline{(x,y) = (2,-3), (-3,-\frac{1}{2})}$

h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-2x-5}{x+1} \leqq -\dfrac{1}{2}x - 2$ を解け.

$y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフが直線 $y = \dfrac{1}{2}x+2$ より下にある x の範囲を求めればよい．グラフと g) の答より，

(答) $\underline{x \leqq -3 \text{ または } -1 < x \leqq 2}$

i) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

$y = \dfrac{-2x-5}{x+1}$ を x について解く．まず，両辺に $x+1$ をかけて，

$(x+1)y = -2x-5$．これを x について整理すると $(y+2)x = -y-5$.

この方程式は $y \neq -2$ のときのみ解を持ち，その解は $x = \dfrac{-y-5}{y+2}$.

したがって，$f^{-1}(y) = \dfrac{-y-5}{y+2}$．ここで，$x$ と y を入れ換えて，

$f^{-1}(x) = \dfrac{-x-5}{x+2}$.

j) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の定義域・値域を述べよ.

$y = f(x)$

- 定義域： $x \neq -1$
- 値域： $y \neq -2$

$y = f^{-1}(x)$

- 定義域： $x \neq -2$
- 値域： $y \neq -1$

$\boxed{2}$ m，n が整数であるとき $(x^m)' = mx^{m-1}$，$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ であることはすでに証明されているとする．このとき，合成関数の微分公式を用い，$a = \frac{m}{n}$ のときにも $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が成り立つことを証明せよ.

$y = u^{\frac{1}{n}}, u = x^m$ とおくと，$y = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$.

合成関数の微分公式より，$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

ここで，すでに証明されていることから，$\frac{dy}{du} = mu^{m-1}$，$\frac{du}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

が成り立つので，

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = mu^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

よって，$a = \frac{m}{n}$ のときにも $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が成り立つことが示された.

【裏面につづく】
【2 枚目につづく】

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{-2x+6}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域は根号内 $\geqq 0$ より，$x \leqq 3$．（正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqq 3\}$）
値域は $y \geqq 0$．（正確には $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geqq 0\}$）

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = \sqrt{-2x+6}$ の両辺を 2 乗して，$y^2 = -2x+6$．これを x について解くと，$x = -\frac{1}{2}y^2 + 3$．ここで，x と y を入れ換えて，$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$．
したがって，$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ である．
$y = f^{-1}(x)$ の定義域は $y = f(x)$ の値域に対応して制限され，$x \geqq 0$．
また，値域は $y = f(x)$ の定義域に対応して，$y \leqq 3$．

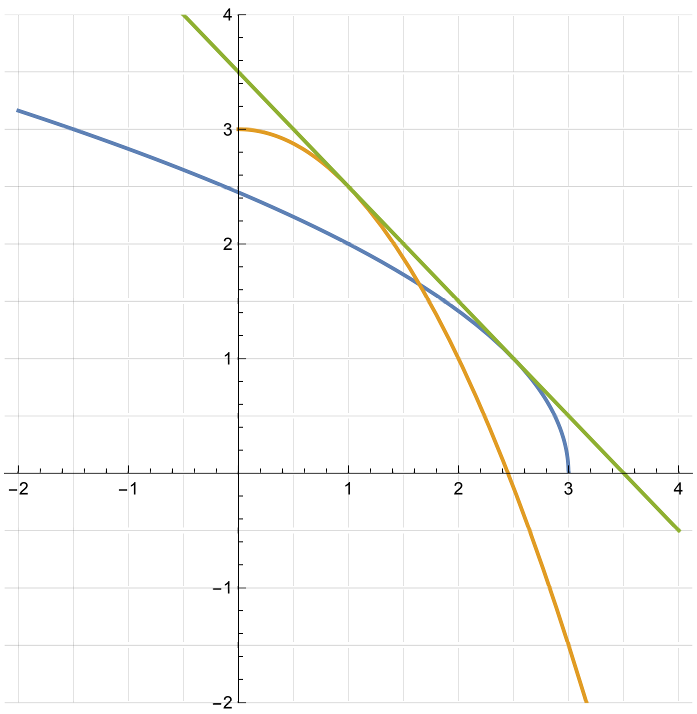
c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left((-2x+6)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2x+6)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x+6)'$$
$$= \frac{1}{2}(-2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+6}}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $\left(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2})\right)$ における接線の方程式を求めよ．

$f(\frac{5}{2}) = 1$，$f'(\frac{5}{2}) = -1$ なので，接線は $(\frac{5}{2}, 1)$ を通り，傾き -1 の直線．
$y - 1 = -1 \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{2}$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$\left(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2})\right)$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$ とする．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域を求めよ．

真数条件および 分母 $\neq 0$ より，$x > 0$．（正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$）

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

$\dfrac{x-1}{x^2} = 0$ より $x = 1$．

d) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ．

$\dfrac{x-1}{x^2} > 0$ より $x > 1$．

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

f) $f(x)$ が定義される範囲内での最大値・最小値があればそれを求めよ．

最小値： -1 $(x = 1)$
最大値： なし．

$\boxed{5}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)'$$
$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x)'(x-1)^2 - (x^2-2x)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{2(x-1)^3 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

$f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ だから，

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{3}-1}(1-x^2)' = -\frac{2}{3}x(1-x^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

$\boxed{6}$ $f(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

実数全体 $\mathbb{R}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x^2-2)'e^{-x} + (x^2-2)\left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - (x^2-2)e^{-x}$$
$$= (-x^2+2x+2)e^{-x}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

e^{-x} の値は常に正であることに注意する．

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+2 > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3}$$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = (-x^2+2x+2)'e^{-x} + (-x^2+2x+2)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= (-2x+2)e^{-x} - (-x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$= (x^2-4x)e^{-x}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ または } x > 4$$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 で表すこと．）

x	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		極小		変曲点		極大		変曲点	

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ．

極大： $x = 1+\sqrt{3}$
極小： $x = 1-\sqrt{3}$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x = 0$ と $x = 4$

$\boxed{7}$ 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ をみたす数であった．ここで，$f(x) = e^x$ とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\cdot\frac{e^h-1}{h}\\ &= e^x\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる．8 年後に元本がもとの 2 倍以上になるためには，年利はおよそ何 % 以上でなければいけないか．$\log 2 = 0.693$ として計算せよ．

8 年後の元利合計は $A(e^r)^8 = Ae^{8r}$．
これが 2 倍以上になるには，$Ae^{8r} \geqq 2A$ とならなければならない．
$e^{8r} \geqq 2$ の両辺の自然対数をとり，$\log e^{8r} \geqq \log 2 \Leftrightarrow 8r \geqq \log 2$．
よって，$r \geqq \frac{\log 2}{8} \fallingdotseq \frac{0.693}{8} = 0.0866434$
すなわち，およそ 8.66% 以上なら 8 年後に 2 倍以上になる．

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】