11 関数のグラフの凹凸

入学年度		学部	学 科		組		番　号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

1. $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x - 2$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$

$f''(x) = 12x^2 + 2x - 4$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = (4x+1)(x-1)(x+1)$ だから,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, -1, -\frac{1}{4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{4}$，$1 < x$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = 12x^2 + 2x - 4 = 2(3x+2)(2x-1)$ だから,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2} < x$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$

2. $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = (x-1)'e^{x+1} + (x-1)(e^{x+1})' = e^{x+1} + (x-1)e^{x+1}$

$= xe^{x+1}$

$f''(x) = (x)'e^{x+1} + x(e^{x+1})' = e^{x+1} + xe^{x+1}$

$= (x+1)e^{x+1}$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

e^{x+1} は常に正の値をとることから,

$f'(x) = xe^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) = xe^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = (x+1)e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f''(x) = (x+1)e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ.

極大となる点：　なし

極小となる点：　$x = 0$　参考：極小値：$-e$，極小点：$(0, -e)$

変曲点：　$(-1, -2)$

【裏に続く】

$\boxed{3}$ $f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$ とする．

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (4x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + 4x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = 4e^{-\frac{x^2}{2}} + 4xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = 4e^{-\frac{x^2}{2}} - 4x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= 4(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = 4(1-x^2)'e^{-\frac{x^2}{2}} + 4(1-x^2)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -8xe^{-\frac{x^2}{2}} - 4x(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= 4x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は常に正だから，

$f'(x) = 0 \iff (1-x^2) = 0 \iff x = 1, -1$

$f'(x) > 0 \iff (1-x^2) > 0 \iff -1 < x < 1$

c) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f''(x) = 0 \iff x(x^2-3) = 0 \iff x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

$f''(x) > 0 \iff x(x^2-3) > 0 \iff -\sqrt{3} < x < 0, x > \sqrt{3}$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ．

極大となる点： $x = 1$

極小となる点： $x = -1$

変曲点： $(-\sqrt{3}, -4\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (0, 0), (\sqrt{3}, 4\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$

f) $e^{-\frac{1}{2}} \fallingdotseq 0.607$，$e^{-\frac{3}{2}} \fallingdotseq 0.223$，$e^{-2} \fallingdotseq 0.135$，$e^{-\frac{9}{2}} \fallingdotseq 0.011$ であるとして，$f(\pm 1)$, $f\left(\pm\sqrt{3}\right)$, $f(\pm 2)$, $f(\pm 3)$ の値を概算せよ．

$f(\pm 1) = \pm 2.428$，　$f\left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm 1.545$，　$f(\pm 2) = \pm 1.08$，　$f(\pm 3) = \pm 0.132$

g) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ であることが知られている．これと，ここまでの結果を用いて，$f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け．