| 入学年度 | | 学部 | 学 科 | | 組 | | 番 号 | | | 検 | フリガナ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | | 1 | | | | | | | 氏 名 | |

$\boxed{1}$ $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

定義域: (根号内) $\geqq 0$ より，$-2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \sqrt{4-x^2} + x\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる $x$ と，$f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \iff (2-x^2) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \iff (2-x^2) > 0 \iff (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ |

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ.

最大値：　$2$　$(x = \sqrt{2})$

最小値：　$-2$　$(x = -\sqrt{2})$

$\boxed{2}$ 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が $V$ で一定であるとき，その表面積 $S$ を最小にしたい.

a) 底面の半径を $r$，高さ $h$ とするとき，$S$ と $V$ をそれぞれ $r$ と $h$ で表せ.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h$

b) $S$ を $V$ と $r$ で表せ.

$V = \pi r^2 h$ より，$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

これを $S$ の式に代入し，

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

c) $S$ を $r$ の関数とみて，$\dfrac{dS}{dr}$ を計算し，$S$ の増減表を書け.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$r$ は正の範囲を動くので，増減表は右の通り.

| $r$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{dS}{dr}$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $S$ | | ↘ | 最小 | ↗ |

d) $S$ が最小になるときの $r$ の値を求めよ．また，そのときの $h$ の値も求めよ.

増減表より，$S$ は $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき最小になる.

このとき，$h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi}\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ $(= 2r)$.

(答) 半径 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，高さ $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ のとき.

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

log の真数条件より，$x > 0$ が必要．また，このとき，分母 $\neq 0$ だから，定義域は $x > 0$.

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ．

$f'(x) = \dfrac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$，$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$<br>極大 | ↘ |

c) b) の結果を用い，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ．

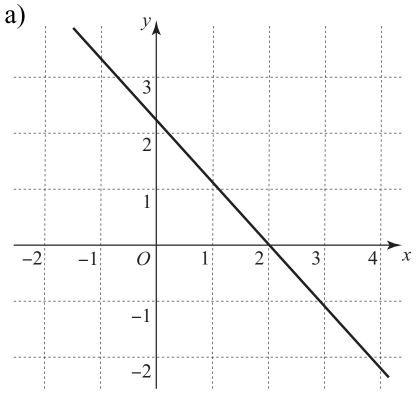
$e = 2.718\cdots < \pi = 3.14159\ldots$ だから，上の増減表より $f(e) > f(\pi)$.
これより直ちに，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ が導かれる．

d) c) の結果を用い，$\pi^e$ と $e^\pi$ のどちらが大きいかを示せ． ［ヒント：$\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ.］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に $e\pi (> 0)$ をかけて，$e \log \pi < \pi \log e$.
さらに，対数の性質を用いて $\log \pi^e < \log e^\pi$.
ここで，対数の底 $e$ は 1 より大きいから，$\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$ が成り立つ．
したがって，$\pi^e < e^\pi$.

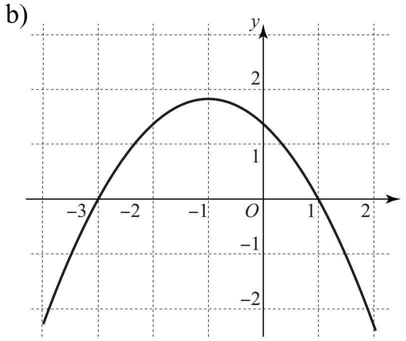
$\boxed{4}$ 次の各々のグラフは導関数 $y = f'(x)$ のグラフの概形を示したものである．これをもとに，$f'(x)$ と $f''(x)$ の値の正負を読み取り，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，$y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，極大・極小となる点，変曲点をもとめよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．)

a)



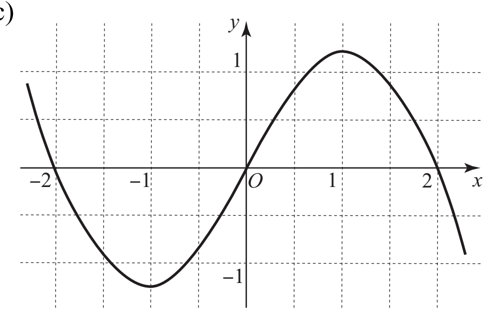
| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↱ | 極大 | ⤵ |

b)



| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↳ | 極小 | ⤴ | 変曲点 | ↱ | 極大 | ⤵ |

c)



| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↱ | 極大 | ⤵ | 変曲点 | ↳ | 極小 | ⤴ | 変曲点 | ↱ | 極大 | ⤵ |

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)