入学年度		学部	学科		組		番号		検	フリガナ
		B		1						氏 名

平均変化率

関数 $y = f(x)$ において，x の値が a から b まで変わるとき，y の値は $f(b) - f(a)$ だけ変化する．このとき，x の値の変化に対する y の値の変化の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x の値が a から b まで変化したときの $f(x)$ の**平均変化率という**

1 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ のとする．

a) x が 1 から 3 まで変化するときの $f(x)$ の変化量を求めよ．

b) x が 1 から 3 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

極限

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が b に限りなく近づくことを，

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \to b \ \ (x \to a)$$

と書き，b を，x が a に近づくときの $f(x)$ の**極限値**という．

2 次の分数式を約分して、既約な分数式になおせ．

a) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8} =$

b) $\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-9x} =$

c) $\dfrac{x^3-a^3}{x-a} =$

d) $\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2} =$

3 次の分数式をなるべく簡単にせよ．

$$\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} =$$

4 次の極限を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-x+2)(3x-1) = 20$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{1^2-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x-4} = -\frac{1}{6}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-9x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{x+a} = \frac{a^2+a\cdot a+a^2}{a+a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$

f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = 3a^2$

g) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3a^2+3ah+h^2)\cancel{h}}{\cancel{h}}$

$\displaystyle= \lim_{h\to 0}(3a^2+ah+h^2) = 3a^2$

h) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right) = \lim_{x\to a}\frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$ について以下の問いに答えよ.

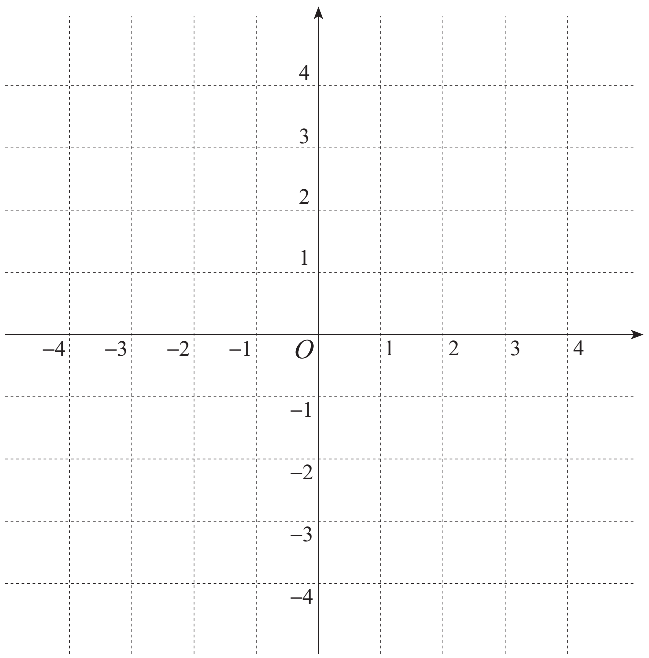
a) 関数 $f(x)$ の定義域を示せ.

$x \neq 0$ (正確には $\{x \mid x$ は実数, $x \neq 0\}$ とか, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ などと表すべきではあるが…)

b) 関数 $f(x)$ を, 絶対値記号を用いない, 場合分けによる形で表せ.

$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ と表せるから, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & (x \geqq 0) \\ \frac{x^3}{-x} & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

c) $y = f(x)$ のグラフを描け.



d) グラフから $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|}$ を求めよ.

グラフを見ると, x が正の値を保ちながら 0 に近づいても, x が負の値を保ちながら 0 に近づいても,
y の値はいずれも 0 に近づく.

$\therefore \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$

微分係数

x の値が a から $a + h$ まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化莉

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

において, h を 0 に限りなく近づけるとき, 平均変化率がある決まった値に限りなく近づくならば, その極限値を, 関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**または**瞬間変化率**といい, $f'(a)$ で表す.

$\boxed{6}$ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ のとする. $x = 2$ における $f(x)$ の瞬間変化率 (= 微分係数) $f'(2)$ を定義にしたがって求めよ.

$\boxed{7}$ 関数 $f(x) = (2x - 3)^2$ について, 以下の問いに答えよ.

a) x が a から $a + h$ まで変化したときの平均変化率を求め, できるだけ簡単にせよ.

b) $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を極限を用いた定義を直接用いて求めよ.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)