入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 静止している物体を自然に落下させたとき、落下しはじめてから t 秒後までの間に落ちる距離を s m とすれば、 $s = f(t) = 4.9t^2$ であることが知られている。

a) 物体が、落下しはじめて 2 秒後から 4 秒後までの間の間の平均の速さを求めよ。

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{2} = \frac{4.9 \times 12}{2} = 29.4 \text{ (m/s)}$$

b) 物体が、落下しはじめて 3 秒後から $3 + h$ 秒後までの間の平均の速さを求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} &= \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9 \times 3^2}{h} = \frac{4.9(3^2 + 6h + h^2 - 3^2)}{h} \\ &= \frac{4.9(6h + h^2)}{h} = 4.9(6 + h) \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

c) 物体が、落下しはじめて 3 秒後の瞬間の速さを b) で求めた平均の速さの極限として求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} = \lim_{h \rightarrow 0} 4.9(6 + h) = 29.4 \text{ (m/s)}$$

2 次の関数で、各々の場合について平均変化率を求め、なるべく簡単な形で表せ。

a) $f(x) = x^3 - 1$, x が -1 から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{7 - (-2)}{3} = 3$$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$, x が a から $a + h$ まで変化するとき

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} &= \frac{3(a+h)^2 - 1 - (3a^2 - 1)}{h} = \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 1 - 3a^2 + 1}{h} \\ &= \frac{6ah + 3h^2}{h} = 6a + 3h \end{aligned}$$

3 関数 $f(x) = (2x + 1)^2$ とするとき、次の微分係数を定義を直接用いて計算せよ。

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(-1+h) + 1)^2 - (2(-1) + 1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h - 1)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 - 4h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4h - 4) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(a+h) + 1)^2 - (2a + 1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2a + 2h + 1)^2 - (2a + 1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4a^2 + 8ah + 4h^2 + 4a + 4h + 1) - (4a^2 + 4a + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8ah + 4h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8a + 4h + 4) = 8a + 4 \end{aligned}$$

4 関数 $f(x) = x^3 - 1$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義を直接用いて計算せよ。

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((-1+h)^3 - 1) - ((-1)^3 - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 - 1 - (-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 3h + h^2) = 3 \end{aligned}$$

5 関数 $f(x) = x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義を直接用いて計算せよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

6] 次の関数の導関数を求めよ。(まず $f(x)$ を展開せよ.)

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$
 $f'(x) = 3x^2 - 12x$

b) $f(x) = x(7x - 3x^2) = 7x^2 - 3x^3$
 $f'(x) = 14x - 9x^2$

c) $f(x) = (2x - 1)(3x + 5) = 6x^2 + 7x - 5$
 $f'(x) = 12x + 7$

d) $f(x) = (5x - 1)^2 = 25x^2 - 10x + 1$
 $f'(x) = 50x - 10$

e) $f(x) = (4x^2 - 1)(3x + 2) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$
 $f'(x) = 36x^2 + 16x - 3$

f) $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 1$
 $f'(x) = 3x^2$

7] 関数 $f(x) = x^2 - x + 1$ について、次の問いに答えよ.

a) x が a から b まで変化するとき、関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ.

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(b^2 - b + 1) - (a^2 - a + 1)}{b - a} = \frac{(b^2 - a^2) - (b - a)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)((b + a) - 1)}{b - a} = b + a - 1 \end{aligned}$$

b) $x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が、a) の平均変化率に一致するとき、 $c = \frac{a + b}{2}$ であることを示せ.

$f'(x) = 2x - 1$ だから、 $f'(c) = 2c - 1$.
 $b + a - 1 = 2c - 1$ を c について解くと、 $c = \frac{a + b}{2}$.

8] 半径 r の球の表面積 S と体積 V をそれぞれ r の関数と考え、 S と V を r で微分せよ.

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = S \text{ (これは偶然ではない.)}$$

9] 次の関数 $f(x)$ について、 $f'(x)$ を求め、 $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$
 $f'(x) = 3x^2 + 6x$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3x(x + 2) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \text{ または } x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3(x - 3)(x + 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -1 \text{ または } x > 3 \end{aligned}$$

【発展問題】

10] 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について、次の問いに答えよ.

a) x が a から $a + h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ.

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a + h)}{(a + h)a} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(a + h)a} = \frac{-1}{(a + h)a} \end{aligned}$$

b) $x = a$ における微分係数を定義に従って求めよ.

$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a) で求めた平均変化率の極限だから

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(a + h)a} = -\frac{1}{a^2}$$